FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXII
Palchetto 6
Num.° d' ordine 58
3531
N.° 19

NAZIONALE
B. Prov.
I
VITT. EM.
256
NAPO

Digitized By Google

B. Thor
I
2562

C08789

L'ARITHMÉTIQUE
ET
LA GEOMETRIE
DE L'OFFICIER;

CONTENANT

LA THEORIE ET LA PRATIQUE
DE CES DEUX SCIENCES,

APPLIQUE'ES AUX DIFFERENS EMPLOIS DE L'HOMME DE GUERRE.

Par M. LE BLOND, Professeur de Mathématique des Pages de la Grande Ecurie du Roi, & des Pages de Madame la Dauphine.

TOME SECOND.

300

A PARIS, QUAI DES AUGUSTINS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gist-le-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

TABLE

DES ARTICLES ET DES TITRES contenus en ce Volume.

DE l'extraction des Racines quarrées & cubiques, Pag. 1
De l'extraction de la Racine quarrée, ibid.
Exemples d'extractions de Racines quarrées, 10
Démonstration de l'extraction de la Racine quarrée, 12
Moyens d'approcher autant qu'on le voudra des Racines quarrées des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, 21
Démonstration de la méthode d'approximation des Racines quarrées, 23
De l'extraction des Racines quarrées des fractions, 24
Usages de la Racine quarrée pour la formation des bataillons quarrés, 25
De l'extraction de la Racine cube, 30
Démonstration de l'extraction de la Racine cube, 39
Moyen d'approcher aussi près qu'on le voudra de la Racine cube des nombres qui ne seront pas des cubes parfaits, ou dont l'extraction de la Racine aura un reste, 43
Démonstration de cette approximation, 46
Des rapports & des proportions, 48
Expressions abregées dont on se servira pour démontrer la théorie des rapports & des proportions, 52
Des rapports ou raisons géométriques, 56
Des differentes especes de rapports géométriques, 59
Des rapports composés, 72
Des differentes especes de rapports ou raisons composés, 75

De la proportion géométrique, 81
Remarque ou observation sur la démonstration de la Regle de Trois, ou de Proportion, 91
Des differentes manieres de changer l'arrangement & les termes d'une proportion, en conservant toujours une proportion, 93
De la progression géométrique, 103
Du rapport & de la proportion arithmétique, 115
De la progression arithmétique, 119
Application des progressions arithmétiques aux bataillons triangulaires, ou disposés en triangles, 125
Des incommensurables, 131
Des triangles semblables, 139
Démonstration de l'operation dont on s'est servi pour couper une ligne en plusieurs parties égales avec le compas de proportion, 149
Proprietés des cordes, des secantes & des tangentes du cercle, 157
De l'inscription géométrique dans le cercle du Décagone, du Pentagone & du Quindécagone, ou Polygone de quinze côtés, 166
Des figures semblables, du rapport de leurs circonférences & de leurs superficies, 177
Des Plans, 209
Des Solides, 227
Des Corps réguliers, 239
Maniere de construire les corps réguliers avec du carton ou autrement, 241
Construire le Tetraëdre, ibid.
Construction de l'Octaëdre, 242
Construction de l'Icosaëdre, ibid.
Construire le Cube, 243
Construire le Dodecaëdre, ibid.
Des solides semblables, 245
De la mesure des surfaces des corps, 247

Du rapport des ſurfaces des ſolides ſemblables, 268
De la Stéréometrie, ou meſure des corps, 271
Obſervation ſur tout ce qui a été établi touchant la meſure & l'égalité des ſolides, 295
Du rapport des ſolides ſemblables, 297
Uſage du compas de proportion pour faire des ſolides ſemblables dans tel rapport que l'on veut, 325
Supplement ſur les cinq corps réguliers, 331
De l'Exaëdre ou du Cube, 336
Du Dodécaëdre, 342
De l'Icoſaëdre, 345
De la Trigonométrie, 352
Conſtruction des tables des ſinus, tangentes & ſecantes, 358
Maniere de déterminer les tangentes & les ſecantes de tous les arcs du quart de cercle, 369
Explication de l'arrangement des ſinus, tangentes & ſecantes dans les tables, 370
Des Logarithmes, 373
Conſtruction de la table des Logarithmes, 374
Que l'augmentation des nombres eſt proportionnelle à celle de leurs Logarithmes, 390
Application des Logarithmes aux différentes operations dans leſquelles on les employe, & qui en donnent l'uſage, 393
De la réſolution ou du calcul des triangles, 396
Principes pour la réſolution des triangles rectangles, 397
Principes pour la réſolution des triangles rectangles, 398
Problémes pour la réſolution des triangles rectangles, 403
Problémes pour la réſolution des triangles acutangles & obtuſangles, 410
Du Nivellement, 420
Table pour les hauteurs du niveau apparent au-deſſus du véritable, depuis 50 toiſes juſqu'à 4000, 425
Du niveau d'eau, 426
Uſages du niveau d'eau, 427

Du Nivellement moyen, 430
Du Nivellement composé, 434
Modele du Mémorial sur lequel on écrit les hauteurs ascendantes ou descendantes, 437
Du Nivellement réciproque, 439
Application de la Trigonométrie, 441
Observation sur les divisions des instrumens propres à mesurer les angles pour le calcul trigonométrique, ibid.
Problémes de trigonométrie, 445

Fin de la Table des Articles & Titres.

CORRECTIONS ET ADDITION
pour le Tome II.

Page 45, ligne premiere, $\frac{617}{100}$, *écrivez* $\frac{617}{100}$.
Page 53, après la ligne 14, ajoûtez ce qui ſuit.

Il faut obſerver, dans la Multiplication, que l'arrangement qu'on donne aux lettres eſt abſolument indifférent à la valeur du produit : car comme chaque lettre a une valeur particuliere qui ne dépend pas de la place qu'elle occupe dans le produit, il s'enſuit que les mêmes lettres feront toujours le même produit, quel que ſoit leur arrangement. En effet ſi l'on a le produit *abc*, dans lequel *a* ſoit par exemple égal à 2, *b* à 3, & *c* à 4, il eſt évident que ces trois nombres étant multipliés enſemble comme on voudra, donneront toujours le même produit 24. Ainſi *abc*, *bca* ou *cba*, , &c. ſignifieront la même choſe. Dans l'uſage ordinaire on ſuit l'ordre alphabétique dans l'arrangement des lettres d'un produit, parce que c'eſt le plus propre à faire diſtinguer ou remarquer plus aiſément toutes celles dont il eſt compoſé ; mais il ſuit de ce qu'on vient d'obſerver que cet ordre n'eſt point de néceſſité abſolue.

Page 55, ligne 3, en comptant par le bas, au lieu de $a^3 = aaa$, *écrivez* $a^3 = aa$.

Page 56, ligne premiere. Car $a \times a = aa = a^3$, *écrivez* Car $a \times a = aa = a^2$.

Page 297, ligne 16, ainſi les ſolides auront, *liſez* ainſi les ſolides ont.

Il y a encore pluſieurs autres fautes dans les deux Tomes de cet Ouvrage, mais elles n'ont pas paru aſſez importantes pour en faire l'énumération dans cet Errata. *Il ſera aiſé de les appercevoir & de les corriger.*

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur aura ſoin de mettre les 18 Planches du Tome I. à la fin du premier Volume, & les 27 Planches du ſecond à la fin de celui-ci.

Il obſervera de les faire ſortir en entier hors du Livre, enſorte qu'elles ſe déployent vers la droite. Elles ſeront placées ſuivant leur ordre numérique 1, 2, 3, &c.

LA

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE VI.

De l'Extraction des Racines quarrées & cubiques.

I.

De l'Extraction de la Racine quarrée.

469. LE QUARRE' d'un nombre quelconque, eſt, comme on l'a déja, dit le produit de ce nombre par lui-même ; & le nombre qui a été ainſi multiplié, eſt la *racine* du quarré ou du produit qui réſulte de ſa multiplication.

Si on multiplie, par exemple, 7 par 7, le pro-

duit 49 ſera le quarré de 7, & 7 en ſera la racine quarrée.

470. Il ſuit de-là, que la racine quarrée d'un nombre quelconque comme 36, eſt un autre nombre 6, qui étant multiplié par lui-même, donne pour produit le nombre propoſé 36.

471. Il eſt toujours facile de quarrer toutes ſortes de nombres, puiſqu'il ne s'agit que d'en faire un produit, dont ils ſoient & le Multiplicateur & le Multiplicande : Mais l'opération néceſſaire pour découvrir la racine d'un nombre conſideré comme quarré, a un peu plus de difficulté. On va d'abord en donner la pratique ; on expliquera enſuite les principes dont elle ſe déduit, & qui ſervent à ſa démonſtration.

472. Avant de commencer l'opération, il faut ſçavoir par cœur les quarrés des 9 chiffres ou caracteres de l'Arithmetique. On les met ici ſous leur racine.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Cela poſé, ſoit le nombre 576 dont il faut extraire la racine quarrée, c'eſt-à-dire, trouver un autre nombre qui étant multiplié par lui-même faſſe 576.

473. Il faut le partager en tranches compoſées de deux chiffres, en commençant par la droite, & allant vers la gauche ; cette ſéparation ſe fait avec de petites lignes droites. Ayant dans cet exemple formé une tranche des deux premiers chiffres de la droite 7 & 6, il n'eſt reſté pour la ſeconde ou la derniere tranche que le chiffre 5, qui fait ſeule une tranche ; ce qui arrive toujours lorſque le nombre

des chiffres du quarré eſt impair, ou ce qui eſt la même choſe, lorſqu'il ne peut être diviſé exactemement par 2.

	5	7	6	Racine. 24
	4			
	1	7	6	
		4	4	
		0	0	

474. On prend la racine du plus grand quarré, contenu dans la premiere tranche de la gauche. Ce plus grand quarré dans cet exemple eſt 4, dont la racine eſt 2, qu'on poſe à côté du nombre 576, comme on poſe le quotient dans la diviſion à côté du dividende: On quarre 2, & on poſe ſon quarré 4 ſous le chiffre, ou les chiffres de la premiere tranche à droite, lorſqu'il y en a deux. On poſe donc ici 4 ſous 5, & ôtant 4 de 5, il reſte 1, qu'on poſe ſous 4, & dans la même colomne.

475. On abbaiſſe enſuite la tranche ſuivante à côté du reſte 1; elle fait avec ce reſte 176. On double le premier chiffre 2 de la racine, ce qui fait 4, qu'on poſe ſous le chiffre 7 de la gauche de la tranche 76. On cherche après cela, comme dans la diviſion, combien le reſte de la premiere tranche, joint au chiffre de la gauche de la ſeconde, contient de fois le double du premier chiffre de la racine, c'eſt-à-dire, dans cet exemple combien 17 contient de fois 4: on trouve 4 qu'on poſe au quotient à la droite du premier chiffre 2. On écrit auſſi 4 ſous le ſecond chiffre 6 de la ſeconde tranche, enſorte qu'on a 44 pour le Diviſeur de 176. On multiplie enſuite 44 par 4, & on retranche ſon produit de 176 comme dans la diviſion.

On dit donc d'abord, 4 fois 4 font 16, ôté de 16 il reſte zero, qu'on poſe ſous le 4 à la colomne des unités, & on retient 1. Et enſuite, 4 fois 4 font encore 16, & 1 de retenue font 17, ôté de 17 il reſte

zero. L'extraction de la racine eſt achevée, parce qu'il n'y a plus de tranches à abbaiſſer, & 24 eſt la racine de 576.

476. Pour le prouver, il faut quarrer 24, ou le multiplier par lui-même, & comme le produit donne le quarré 576, égal à celui dont on a extrait la racine, il s'enſuit que l'opération eſt exacte.

Preuve.

24
24
96
48.
576.

Pour trouver la racine quarrée du nombre 487801 compoſé de ſix chiffres, on le partagera en tranches de deux en deux chiffres, en commençant par la droite. On prendra la racine du plus grand quarré que contient la premiere tranche à gauche 48. Ce quarré eſt 36, dont la racine eſt 6 qu'on poſera au Quotient. Son quarré 36 ſera poſé ſous les deux chiffres de la tranche 48. On ôtera 36 de 48 : il reſtera 12, qu'on poſera ſous 36, & la premiere opération ſera achevée.

Racine. 6 9 8

4	8	7	8	0	1
3	6				
1	2.	7	8		
	1	2	9		
		1	1	7.	0 1
			1	3	8 8
Reſte	.	.	.	5	9 7.

On abbaiſſera la ſeconde tranche 78 à côté du reſte 12 de la premiere opération ; on doublera le premier chiffre 6 de la racine, & l'on aura 12, qu'on

poſera de maniere que le 2 ſoit ſous le premier chiffre 7 de la tranche abbaiſſée, & l'unité avancée d'une colomne vers la gauche. On cherchera enſuite, comme dans la diviſion, en 12 combien il y a de fois 1; on trouvera 9, qu'on poſera au quotient, & enſuite ſous le chiffre 8 de la ſeconde tranche, & l'on aura 129 pour diviſeur de 1278. On multipliera 129 par 9, & on ôtera ſon produit de 1278 comme dans la diviſion. Pour cela, on dira 9 fois 9 font 81, qui étant ôté de 88, il reſtera 7, qu'on poſera ſous le 9 du diviſeur, & on retiendra 8. Allant enſuite au ſecond chiffre 2 du diviſeur, on dira, 9 fois 2 font 18, & 8 de retenue, font 26, qui étant ôté de 27, il reſte 1, qu'on poſera ſous le chiffre 2 du diviſeur, & on retiendra 1. Enfin, paſſant au troiſiéme chiffre 1 du diviſeur, on dira 9 fois 1 font 9, & 2 de retenue font 11, qui étant ôté de 12, reſte du dividende de cette opération, il reſtera 1, qu'on poſera ſous le chiffre 1 du diviſeur.

On abbaiſſera la derniere tranche 01 de la gauche, qui eſt la premiere de la droite, à côté du reſte 117 de la précedente opération; elle fera avec ce reſte le nombre 11701. On doublera les deux chiffres 6 & 9 déja trouvés pour quotient, ou ce qui eſt la même choſe, on les multipliera par 2, & on poſera leur produit de maniere que le premier chiffre ſoit ſous le chiffre de la gauche de la tranche qu'on vient d'abbaiſſer, & les autres, ſuivant leur ordre numérique, en allant vers la gauche. On dira donc, pour doubler ou multiplier 69 (partie déja trouvée de la racine) par 2; 2 fois 9 font 18, & on poſera 8 ſous le chiffre zero de la gauche de la derniere tranche, & on retiendra 1; enſuite 2 fois 6 font 12, & 1 de retenue font 13, & on poſera 3 à la colomne qui précede vers la gauche le chiffre 8 qu'on

vient de poſer, & on avancera 1 à la colomne qui précede cette derniere.

On cherchera après cela, en 11 combien il y a de fois 1, on trouvera 8, qu'on poſera à la racine, & enſuite ſous le chiffre 1 de la droite de la derniere tranche. Le diviſeur de 11701 ſera alors 1388. On dira enſuite (toujours comme dans la diviſion, en multipliant tous les chiffres du diviſeur par celui du quotient, & retranchant en même-tems leur produit du dividende) 8 fois 8 font 64, qui ôté de 71 il reſte 7, qu'on poſe ſous le 8 à la colomne des unités, & l'on retient 7. On dira après cela, 8 fois 8 font encore 64, & 7 de retenue font 71, qui ôté de 80, il reſte 9, qu'on poſe ſous le 8 à la colomne des dixaines, & l'on retient 8. On dira enſuite, 8 fois 3 font 24, & 8 de retenue font 32, qui ôté de 37, il reſte 5, qu'on poſera à la colomne des centaines, & on retiendra 3. Enfin, on dira 8 fois 1 font 8, & 3 de retenue font 11, qui ôté du reſte du dividende 11, il ne reſte rien. Le reſte de cette troiſiéme opération ſe trouve donc de 597. Comme il n'y a plus de tranches à abbaiſſer, l'opération eſt achevée, & le nombre 698, qui eſt à la racine, eſt celle du plus grand quarré, contenu dans le nombre propoſé 487801; je dis du plus grand quarré, parce que le reſte de l'opération 597 fait voir que ce nombre n'eſt pas un quarré parfait; s'il l'étoit, comme celui du premier exemple, il ne reſteroit rien.

Preuve.

698
698
5584
6282.
4188..
Reſte ...597
487801.

477. On fera la preuve de cette opération, comme on l'a fait pour le premier exemple, c'eſt-à-dire, en multipliant la racine 698 par elle-même ; mais il faut ajouter à ſon produit le reſte 597, pour retrouver le nombre propoſé 487801, c'eſt-à-dire, celui dont on a extrait la racine.

REMARQUES.

I.

478. Il y a toujours autant de chiffres dans la racine, qu'il y a de tranches dans le nombre propoſé.

II.

479. Quelque nombre de tranches que l'on ait, on ne fait qu'extraire la racine du plus grand quarré contenu dans la premiere ; cette racine eſt le premier chiffre de la racine qu'on ſe propoſe de trouver : On trouve les autres en multipliant par 2, à chaque opération particuliere, ou chaque fois que l'on abbaiſſe une tranche, les chiffres déja trouvés de la racine, obſervant de placer toujours le premier chiffre de ce produit ſous le chiffre de la gauche de la tranche abbaiſſée, & les autres dans les colomnes qui le précedent vers la gauche.

III.

480. On peut conſiderer comme dividende le reſte de chaque tranche, après chaque opération, joint à à la tranche qui ſuit immédiatement vers la droite, & abbaiſſée ſur la même ligne droite que ce reſte ; le diviſeur de ce dividende ſera toujours le produit par 2 des chiffres de la racine déja trouvés ; plus le chiffre que l'opération de la tranche abbaiſſée produira, lequel ajoute une colomne au produit précedent, & qui ſe trouve toujours poſé ſous le chiffre de la droite de la tranche abbaiſſée.

IV.

481. Si le produit du chiffre posé pour racine au quotient par les chiffres qui servent de diviseur, se trouve plus grand que les chiffres qui servent de dividende, il faut alors diminuer ce chiffre d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que le produit dont il s'agit, puisse être retranché du dividende : on se sert pour cet effet du même tatonnement qui se pratique dans la division pour déterminer la grandeur du chiffre du quotient. Chaque fois que l'on diminue ou qu'on change ainsi le chiffre posé pour racine au quotient, il faut le diminuer ou le changer également dans le diviseur.

V.

482. Si après avoir abbaissé une tranche, & doublé les chiffres du quotient pour en former le diviseur, le dividende se trouve plus petit que ce diviseur; on pose zero au quotient; on abbaisse ensuite la tranche suivante, & on double à l'ordinaire tous les chiffres de la racine pour en former un nouveau diviseur. On se conduit dans ce cas à peu près de la même maniere que dans la division, lorsque les chiffres du dividende sont de moindre valeur que ceux du diviseur qui sont placés dessous.

VI.

483. Lorsque la premiere tranche du nombre dont il faut extraire la racine quarrée, est un quarré parfait, & que toutes les autres tranches ne contiennent que des zeros; il faut à la racine de cette premiere tranche ajouter autant de zero qu'il y a de tranches, & l'opération sera achevée. Car comme il doit y avoir autant de chiffres à la racine qu'il y a

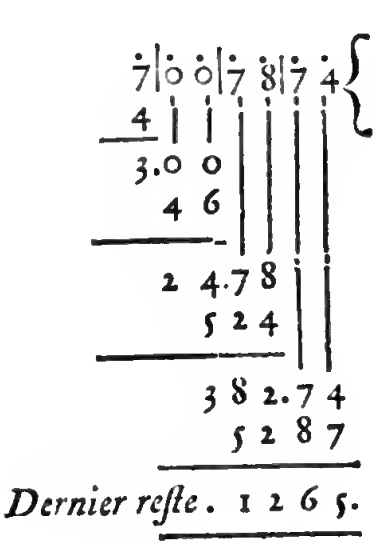
de tranches dans le nombre donné *; il eſt clair que n'y ayant point de reſte dans la premiere opération, & toutes les autres tranches ne contenant que des zeros, les autres caracteres de la racine ne peuvent être non plus que des zeros. * N°. 478

484. Si on fait attention aux deux exemples précedens & aux remarques qui les ſuivent, on pourra aiſément, en obſervant les regles qui y ſont preſcrites, extraire la racine quarrée de toutes ſortes de nombres. Pour aider encore à ſe rendre cette opération plus familiere, il faut former des quarrés en multipliant des nombres pris à volonté par eux-mêmes, & extraire enſuite la racine de ces quarrés par les Regles précedentes. Ces racines ſont connues, car elles ſont les nombres qu'on a élevés au quarré; elles peuvent par conſéquent ſervir à rectifier les fautes qui peuvent échaper aux commençans dans la pratique de cette Régle.

On joint ici quelques exemples figurés de l'extraction de la racine quarrée, pour faire connoître encore plus particuliérement l'application de ce qui a été établi dans les remarques précedentes. L'opération de l'extraction de la racine quarrée eſt d'un ſi grand uſage dans la Géometrie, qu'on ne peut trop s'appliquer à s'en rendre la pratique aiſée & familiere.

EXEMPLES d'Extractions de Racines quarrées.

PREMIER EXEMPLE.



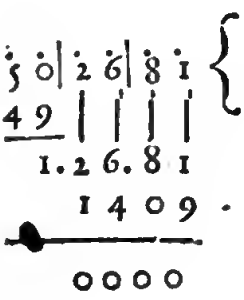
Preuve.

2 6 4 7
2 6 4 7

1 8 5 2 9
1 0 5 8 8 .
1 5 8 8 2 . .
5 2 9 4 . . .
Reſte. 1 2 6 5

7 0 0 7 8 7 4.

SECOND EXEMPLE.



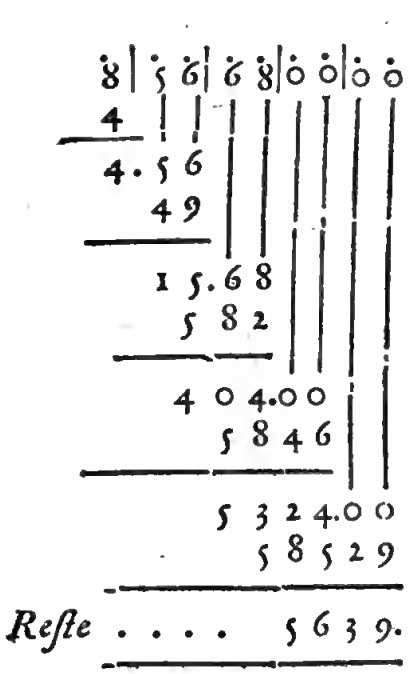
Preuve.

7 0 9
7 0 9

6 3 8 1
4 9 6 3 . .

5 0 2 6 8 1.

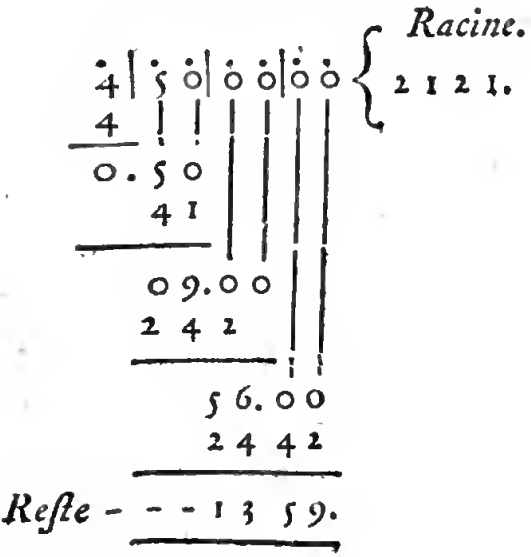
TROISIE'ME EXEMPLE.



Preuve.

29269
29269
263421
175614.
58538..
263421...
58538....
Reſte - 5639
856680000.

QUATRIE'ME EXEMPLE.



Preuve.

2121
2121
2121
4242.
2121..
4242...
Reſte 1359
4500000.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

	Racine.	*Preuve.*
1|00|00|00	1000.	1000
1		1000
0		1000000.

DEMONSTRATION de l'Extraction de la Racine quarrée.

485. Pour démontrer cette opération, il faut remarquer

1°. Que le quarré d'un nombre, exprimé par un ſeul chiffre, en aura au plus 2; car le plus grand nombre exprimé par un chiffre eſt 9, dont le quarré eſt 81, qui n'a que 2 chiffres 8 & 1.

2°. Que le quarré d'un nombre, exprimé par deux chiffres, en aura au moins 3, & au plus 4; car le plus petit nombre exprimé par deux chiffres eſt 10, dont le quarré eſt 100, & le plus grand nombre exprimé par deux chiffres eſt 99, dont le quarré eſt 9801.

3°. Que le quarré de tout nombre, exprimé par trois chiffres, en aura au moins 5, & au plus 6; car le plus petit nombre exprimé par trois chiffres eſt 100, dont le quarré eſt 10000, & le plus grand eſt 999, dont le quarré eſt 998001.

4°. Que tout nombre, compoſé de quatre chiffres, en aura au moins 7 dans ſon quarré, & au plus 8. Ce que l'on peut démontrer de même que dans les cas précedens. De-là, on peut tirer ce Théorême général.

THEOREME I.

486. *Qu'il y a toujours dans le quarré d'un nombre le double des chiffres de ſa racine, ou le double de ces chiffres, moins un.*

D'où il ſuit,

487. 1°. Que lorſque le nombre des chiffres d'un quarré eſt pair, c'eſt-à-dire, qu'il peut ſe diviſer exactement par deux, la moitié du nombre de ſes chiffres donnera le nombre des chiffres de la racine, & que lorſqu'il eſt impair, la moitié du plus grand nombre pair qu'il contient, plus 1, ſera le nombre des chiffres de la racine. Enſorte, que ſi l'on a un quarré qui ait 8 chiffres, ſa racine en aura 4. Et ſi l'on en a un qui ait 7 chiffres, ſa racine en aura 3, plus 1, c'eſt-à-dire, la moitié du plus grand nombre pair 6 contenu dans 7, plus 1, ce qui fait auſſi 4. Ainſi la racine d'un quarré, dont le nombre des chiffres eſt pair, & celle d'un autre quarré impair, dont le nombre des chiffres eſt ſeulement plus petit que celui du premier, d'un chiffre, contiendront le même nombre de chiffres.

488. 2°. Que ſi on partage en tranches de deux en deux chiffres un nombre quarré, en commençant par la droite, & en allant vers la gauche, ſoit que la derniere tranche ait un ou deux chiffres, le nombre de ces tranches exprimera toujours le nombre des chiffres de la racine de ce quarré.

Ceci bien conçu, rend raiſon de la premiere opération de l'extraction de la racine quarrée *; je veux dire du partage en tranches de deux en deux chiffres du nombre propoſé. Pour démontrer le reſte de l'opération, il faut établir ce nouveau Théorême.

* N°. 473.

THEOREME II.

489. *Le quarré d'un nombre, exprimé par deux parties, eſt égal au quarré de la premiere partie, plus au produit du double de la premiere partie par la ſeconde, ou à deux produits de la premiere par la ſeconde, & plus au quarré de cette ſeconde partie.*

Soit par exemple le nombre 24, qui eſt compoſé de 20, & de 4; je dis que ſon quarré 576 eſt compoſé du quarré de 20, qui eſt 400, plus de 2 produits de 20 par 4, qui font 160, & enfin du quarré de 4, qui eſt 16.

400
160
16
576.

On aura la preuve en additionnant enſemble ces differents produits, dont la ſomme eſt 576; qui eſt égale au produit de 24 par 24. Mais on peut le démontrer encore plus clairement, par la formation même du quarré de 24.

Pour cela, il faut multiplier 24 par 24, & diſtinguer chaque produit, comme on le voit pratiqué ci-après.

On multiplie d'abord 4 par 4, & on poſe le produit 16 tel qu'il doit être poſé. On a dit enſuite, 4 multiplié par le 2 des dixaines, produit 8 dixaines, qu'on poſe à la colomne des dixaines. On multiplie enſuite 24 par les deux dixaines du multiplicande, & l'on a d'abord 2 fois 4, qui font 8 dixaines: On poſe 8 aux dixaines, & on multiplie le 2, ou les deux dixaines du multiplicateur, par les deux dixaines du multiplicande, ce qui produit 4 centaines; on poſe 4 à la colomne des centaines.

2 4
2 4

Quarré de 4 16
Premier produit de 4 *par* 20 . . . . 8 .
Second produit de 20 *par* 4 . . . . 8 .
Quarré de 20 . . . . . 4 . .

Quarré de 24 576

Cela fait, il eſt facile de remarquer que la ſomme 576 de ces différens produits, c'eſt-à-dire, le quarré de 24, contient d'abord 16 qui eſt le quarré de 4, enſuite deux produits de 20 par 4; car chacun des 8 poſés à la colomne des dixaines, eſt le produit de 20 par 4. Ces deux produits, qui enſemble font 16 dixaines, ſont la même choſe que le produit du double de 20, qui eſt 40 par 4, c'eſt-à-dire, que les deux produits des deux parties de la racine. Cette même ſomme 576, contient auſſi le quarré de 20, qui eſt 400. Car c'eſt ce quarré que repréſente le 4, qui a été placé aux centaines, dans les differens produits de 24 par 4. D'où s'enſuit la démonſtration du Théorême que l'on vient d'établir; c'eſt-à-dire, *que le quarré d'un nombre conſideré, comme compoſé de deux parties, eſt égal au quarré de la premiere partie, &c.*

Élevant au quarré de la même maniere tout autre nombre, on le trouvera toujours compoſé des mêmes produits, comme on peut encore le voir dans le produit de 305 par 305; nombre qu'on peut conſiderer compoſé de 300, & de 5. Le quarré de ce nombre contient d'abord le quarré de 5, qui eſt 25; enſuite, deux produits de 300 par 5, & le quarré de 300, qui eſt 90000. Il en ſera de même de tous les autres nombres qu'on élevera au quarré.

305
305

Quarré de 5 25
Premier produit de 300 *par* 5 . 1500
Second produit de 300 *par* 5 . 1500
Quarré de 300 90000

93025.

Pl. 1. Fig. 1. Ce Théorême peut encore ſe démontrer par la Géometrie de cette maniere.

490. Soit une ligne droite quelconque AB, partagée en deux parties AC & CB, priſes à volonté, ſur laquelle ſoit conſtruit le quarré ABED.

Soit enſuite mené du point C, CF, parallele à AD ou à BE, & ayant pris AG égale à AC, & mené GH, parallele à AB ou DE, on aura le quarré ABED diviſé en quatre parties; ſçavoir AI, qui eſt le quarré de la premiere partie AC de la ligne AB; IE, qui eſt le quarré de la ſeconde CB, IH & FE; de même que EH étant égales à CB; & enfin DI & IB, qui ſont deux rectangles de la premiere partie AC par la ſeconde CB. Car GI & DF, ſont chacunes égales à AC à cauſe des paralleles AD & CF*, CI & BH ſont, par la même raiſon, égales à AG, qui eſt égale à AC. GD eſt égal à BC: Donc le quarré d'une quantité quelconque, diviſée en deux parties, contient le quarré de la premiere partie; deux produits de la premiere par la ſeconde; plus le quarré de la ſeconde. *Ce qu'il falloit demontrer.*

* Nº. 162.

491. Préſentement il faut remarquer que le quarré de 24, 576, étant partagé en tranches; ſçavoir, la premiere à gauche de deux chiffres, & l'autre d'un chiffre; le quarré de la premiere partie 2 de la racine eſt dans la premiere tranche de la gauche, avec un reſte, & que les deux produits des deux parties

ries de la racine 20 & 4, plus le quarré de 4 ſont contenus dans le reſte de la premiere tranche 5, joint à la ſeconde, ou à celle de la droite. Or, ſi l'on fait attention à la méthode dont on s'eſt ſervie pour l'extraction de la racine quarrée du nombre 576 *, on verra qu'on a décompoſé ce quarré, ſuivant l'ordre de ſa compoſition ou formation.

* N°. 473.

Car après l'avoir partagé par tranches, on a pris la racine 2 du plus grand quarré 4, contenu dans la tranche 5 de la gauche, & on a retranché ce quarré de cette tranche. On a doublé enſuite le premier chiffre 2 de la racine; on l'a poſé ſous le premier chiffre de la gauche de la tranche abbaiſſée, parce que comme il doit y avoir un ſecond chiffre à la racine, le premier occupe la colomne des dixaines. En le doublant, on a donc des dixaines qu'il faut poſer par conſéquent ſous les dixaines du dividende. On a cherché par la diviſion le ſecond chiffre 4, ou la ſeconde partie de cette racine; on a multiplié par cette ſeconde partie le double 4 de la premiere 2, ou 20, ce qui a donné les deux produits des deux parties de la racine; on a retranché ces deux produits du reſte de la premiere tranche, joint à la ſeconde; on a auſſi retranché de cette même quantité le quarré 16 de la ſeconde partie 4, puiſqu'on a poſé 4 ſous le dernier chiffre de la tranche de la gauche, & qu'on a regardé comme un ſeul diviſeur le double du premier chiffre de la racine, plus le ſecond chiffre 4. D'où il ſuit, que le nombre 24, trouvé par la méthode preſcrite, eſt la racine quarrée du propoſé 576.

REMARQUE.

492. Le même raiſonnement qu'on vient de faire peut s'appliquer à tout autre nombre que 576,

composé d'un plus grand nombre de tranches.

Suppoſant qu'il y ait 3 tranches dans un nombre propoſé ; on extrait d'abord la racine du plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche ; on double le premier chiffre trouvé de la racine, & on cherche par ſon moyen le ſecond chiffre, ou la ſeconde partie de la racine : Par cette ſeconde partie, on multiplie le double du premier chiffre, plus le ſecond chiffre, & ces produits étant retranchés de la ſeconde tranche & du reſte de la premiere, on a, ſuivant ce qu'on vient de prouver, la racine du plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches du nombre propoſé. Or, ſi on conſidere enſuite cette racine, compoſée de deux chiffres, comme celle de la premiere partie du nombre donné, on trouvera dans cette ſuppoſition la ſeconde partie ou le troiſiéme chiffre de la racine de la même maniere qu'on a trouvé le ſecond. On trouveroit de même le quatriéme & le cinquiéme, &c. s'il y avoit plus de trois tranches. Donc l'opération preſcrite fait trouver la racine quarrée de tout nombre propoſé, lorſqu'il eſt quarré, ou celle du plus grand quarré contenu dans ce nombre, lorſqu'il n'eſt pas un quarré exact, c'eſt-à-dire, lorſqu'il y a un reſte dans l'opération.

On peut encore démontrer l'opération preſcrite pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui a trois tranches, par ce Théorême.

THEOREME III.

493. *Que le quarré d'un nombre, dont la racine a trois chiffres ou trois parties, eſt égal au quarré de la premiere partie, plus à deux produits de la premiere par la ſeconde, au quarré de cette ſeconde ; plus à deux produits des deux premieres parties de la racine par la*

troiſiéme, & plus enfin au quarré de cette troiſiéme partie.

On démontre ce Théorême par la formation d'un quarré dont la racine a trois chiffres.

Soit, par exemple, 543 à élever au quarré.

On fera autant de produits particuliers, qu'il y a de chiffres à multiplier enſemble, ainſi qu'on l'a expliqué N. 489, & qu'on le voit dans l'exemple figuré.

On aura alors au dernier rang du bas de l'opération 25 . . . . ou 250000, qui eſt le quarré de la premiere partie 500. On trouve au-deſſus le produit 20 . . . ou 20000, qui eſt le produit de 500 par 40, c'eſt-à-dire, de la premiere partie par la ſeconde. Enſuite en remontant on a 15 . . ou 1500, qui eſt le produit de la premiere partie 500, par la troiſiéme 3. Puis au-deſſus le produit 20 . . . ou 20000, qui eſt encore un produit de la premiere partie 500, par la ſeconde 40. Enſuite ſe trouve 16 . . ou 1600, qui eſt le quarré de la ſeconde partie 40. On trouve après 12 . ou 120, qui eſt un produit de la ſeconde partie 40, par la troiſiéme 3. Au-deſſus, un autre produit de la premiere partie 500, par la troiſiéme 3. Puis un produit de 40 par 3, & enfin le quarré de 3.

				5 4 3 5 4 3
	Quarré de la troiſiéme partie 3	. .	. .	. 9
C.	*Per. produit de la 2de.* 40, *par la 3me.* 3 . . .	. .	. 1	2 .
B.	*Per. produit de la pre. partie* 500, *par la 3me* 3.	. .	1 5	. .
C.	*Second produit de la ſeconde* 40, *par la 3me.* 3.	. .	. 1	2 .
	Quarré de la ſeconde partie 40	. .	1 6	. .
A.	*Per. produit de la pre.* 500, *par la 2de.* 40 . . .	. 2	0 .	. .
B.	*Second produit de la pre.* 500, *par la 3me.* 3 . .	. .	1 5	. .
A.	*Second produit de la pre.* 500, *par la 2de.* 40 . .	. 2	0 .	. .
	Quarré de la premiere partie 500	2 5	. .	. .
	Quarré de 543	2 9	4 8	4 9

Si on obſerve tous ces produits particuliers, & qu'on marque d'une même lettre ceux qui ſont formés des mêmes parties de la racine, ainſi qu'on l'a fait dans l'exemple figuré, on verra alors évidemment, que le quarré total de 543, c'eſt-à-dire 294849, eſt compoſé du quarré de 500, premiere partie de la racine; de deux produits A & A de la premiere partie 500, par la ſeconde 40; du quarré 1600 de cette ſeconde partie. Plus des deux produits B, B & C, C, des deux premieres parties de la racine 500 & 40, par la troiſiéme 3, & enfin du quarré 9 de cette troiſiéme partie, ce qui donne la démonſtration du Théorême propoſé.

COROLLAIRE.

494. Si l'on additionne enſemble tous ces differens produits dans l'ordre qui leur convient par rapport à leur valeur, & ſi l'on partage le quarré 294849 en tranches à l'ordinaire de deux en deux chiffres, on verra

495. 1°. Que la premiere tranche à gauche 29 (qui vaut 290000) contient le quarré 25 ou 250000 de la premiere partie 500.

496. 2°. Que l'excès de cette tranche, ſur le quarré de la premiere partie, joint à la tranche ſuivante, contient deux produits 20000 de la premiere partie de la racine par la ſeconde, plus le quarré de cette ſeconde partie;

497. Et 3°. que le ſurplus de cette ſeconde tranche, joint à la troiſiéme, contient deux produits des deux premieres parties de la racine par la troiſiéme, & plus le quarré de cette troiſiéme.

D'où il ſuit,

498. Qu'après avoir trouvé les deux premieres

parties de la racine, contenues dans les deux premieres tranches du quarré, il faut les doubler pour avoir un diviſeur qui ſerve à trouver la troiſiéme; car le double de ces deux parties multiplié par la troiſiéme, donne évidemment les deux produits de chacune de ces parties par la troiſiéme : Donc en retranchant du reſte de la ſeconde tranche, joint à la troiſiéme, le produit du double des deux premieres parties par cette troiſiéme, de même que ſon quarré, on retranche de ce reſte, les derniers produits qui lui reſtent des premieres parties par la troiſiéme, & le quarré de cette troiſiéme : Donc l'opération preſcrite pour l'extraction de la racine quarrée fait trouver les trois parties de cette racine, lorſque le quarré a trois tranches. C. q. f. d.

499. On démontrera par la même méthode, que ſi un nombre propoſé pour en extraire la racine quarrée a 4 tranches, c'eſt-à-dire, que ſi ſa racine a 4 chiffres *, que le reſte de la troiſiéme tranche, joint à la quatriéme, contiendra deux produits des trois premieres parties par la quatriéme, plus le quarré de cette quatriéme. Que s'il a cinq tranches, le reſte de la quatriéme tranche, joint à la cinquiéme, contiendra deux produits des quatre premieres parties de la racine par la cinquiéme, & plus le quarré de cette cinquiéme. Et ainſi de ſuite des autres nombres qui auront plus de cinq tranches.

* N°. 488.

Moyen d'approcher autant qu'on le voudra des racines quarrées des nombres qui ne ſont pas des quarrés parfaits.

REGLE GENERALE.

500. Il faut ajouter au nombre propoſé autant de zero en nombre pair qu'on le voudra, négliger

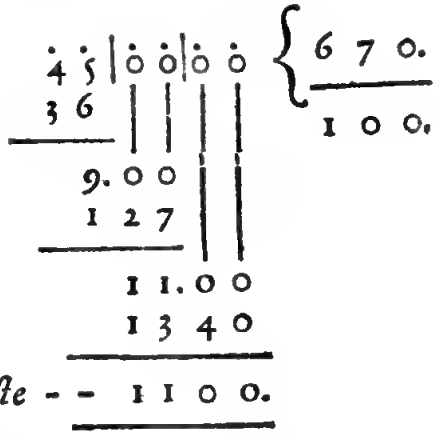
ce qui reſtera après l'extraction de la racine, & diviſer cette racine par l'unité, ſuivie de la moitié du nombre des zeros qu'on aura ajoutés au dividende de la racine.

Par exemple, ſi on a ajouté quatre zeros, on diviſera la racine par 100, c'eſt-à-dire par l'unité, ſuivie de deux zeros. Si on en a ajouté 6, on diviſera la racine par 1000, & ainſi de ſuite.

Application de cette Regle à un exemple.

501. Soit le nombre 45, dont il faut extraire la racine quarrée. Cette racine eſt plus grande que 6, car 6 fois 6 font 36, nombre qui eſt plus petit que 45. Et elle eſt moindre que 7, parce que 7 fois 7 font 49, nombre plus grand que 45. Ainſi la racine du nombre 45 eſt néceſſairement entre 6 & 7. Pour en approcher, j'ajoute au nombre 45, quatre zeros, ce qui donne le nombre 450000, dont j'exrrais la racine quarrée à l'ordinaire, & je trouve pour la racine de ce nombre 670, qui étant diviſé par 100 donne ſix entiers, plus la fraction $\frac{70}{100}$, & cette racine ne differe pas de la vraie, d'un centiéme. Car ſi au lieu du zero qui occupe la premiere colomne de la droite de la racine, on avoit poſé 1, on auroit eu le diviſeur 1341 plus grand que le dividende 1100, & par conſéquent on n'auroit pû l'en retrancher.

Si au lieu de quatre zeros on en avoit ajouté ſix, on auroit eu un nombre qui n'auroit pas differé de la vraie racine de la milliéme partie de l'unité, & de la dix milliéme, ſi on lui en avoit ajouté 8, &c.



DEMONSTRATION de la méthode d'approximation des Racines quarrées.

502. Cette démonſtration conſiſte à faire remarquer, *que ſi on multiplie le quarré d'un nombre par le quarré d'un autre, la racine du premier ſera multipliée par celle du ſecond.*

Soit, par exemple, le nombre quarré 36; je dis que ſi on le multiplie par 100, autre nombre quarré, ſa racine qui eſt 6, ſera multipliée par celle de 100, qui eſt 10.

Car le quarré 36 eſt le produit de 6 par 6, & le quarré 100, celui de 10 par 10; mais ſi on multiplie 36 par 100, il eſt évident que c'eſt la même choſe que de multiplier enſemble 6, 6, 10 & 10, ou 6, plus 10 par 6, plus 10, c'eſt-à-dire 16 par 16: Donc dans le produit de 36 par 100, la racine 6 du premier quarré eſt multiplié par celle du ſecond qui eſt 10.

Préſentement ſi l'on fait attention qu'en ajoutant deux zeros à un nombre, on le multiplie par 100 *, & par 10000 ſi on lui en ajoute 4, &c. on verra

* Arith. N°. 52 & 53.

qu'ayant ajouté quatre zeros au nombre 45, on a multiplié ſa racine par 100; donc on l'a rendue cent fois plus grande : Donc pour en avoir la juſte valeur, il faut la diviſer par 100.

Cette démonſtration peut s'appliquer également à toutes les autres quantités de zeros, qu'on ajoutera en nombre pair aux nombres dont on voudra avoir une racine qui differe peu de la vraie.

REMARQUE.

503. On obſervera ici que lorſqu'un nombre entier n'a pas pour ſa racine un autre nombre auſſi entier, il n'a pas non plus pour ſa racine une fraction, c'eſt-à-dire, qu'aucune fraction multipliée par elle-même ne produira ce même nombre entier. On ne démontrera point ici cette verité, parce qu'elle dépend de pluſieurs propoſitions préliminaires, dont on n'a pas encore parlé; mais on peut en donner une preuve de fait. C'eſt que ſi l'on prend un nombre quelconque, comme 45, qui n'eſt pas un nombre quarré, & dont la racine eſt entre 6 & 7; plus on ajoutera de zeros à 45, & plus on aura un nombre pour racine qui approchera de la vraie, mais qui ne le ſera jamais exactement, attendu qu'il y aura toujours un reſte dans la derniere opération. Ce qui fait voir que la racine multipliée par elle-même, ne fera jamais le nombre donné, augmenté des zeros qu'on lui a ajoutés, puiſqu'il s'en faudra le reſte de la derniere opération : Donc la racine trouvée ne ſera pas la racine exacte de ce nombre. On en donnera une démonſtration plus exacte à la fin du Livre ſuivant.

De l'Extraction des Racines quarrées des fractions.

504. Pour extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut la réduire à ſes moindres termes, & ex-

traire enſuite la racine quarrée de l'un & de l'autre, ce qui donnera une nouvelle fraction, qui ſera la racine de la propoſée.

Par exemple, pour tirer la racine quarrée de $\frac{12}{27}$, je la réduis d'abord à ſes moindres termes $\frac{4}{9}$, & tirant la racine quarrée du numerateur & du dénominateur, j'ai la nouvelle fraction $\frac{2}{3}$, qui eſt la racine de la propoſée $\frac{12}{27}$ ou $\frac{4}{9}$. La preuve s'en fait comme dans les nombres entiers, c'eſt-à-dire, en multipliant la racine par elle-même.

S'il falloit extraire la racine quarrée d'un nombre entier, accompagné de fraction, comme de $6\frac{1}{4}$, il faudroit réduire l'entier en fraction en le multipliant par 4, & l'on auroit $\frac{24}{4}$ égale à 6, & ajoutant $\frac{1}{4}$ à $\frac{24}{4}$ on auroit $\frac{25}{4}$ égale au nombre propoſé; donc la racine eſt $\frac{5}{2}$.

505. Si le numerateur & le dénominateur de la fraction propoſée ne ſont pas des quarrés parfaits (la fraction étant réduite à ſes moindres termes) il faut trouver la racine approchée de chacun de ſes termes, comme on vient de l'enſeigner *, & l'on aura une fraction qui approchera de la vraie racine autant qu'on le voudra.

* N°. 500.

Uſages de la racine quarrée pour la formation des Bataillons quarrés.

506. Outre les uſages de la racine quarrée dans la Géometrie, elle ſert auſſi à la formation des Bataillons quarrés; c'eſt ce qu'on va expliquer en peu de mots.

507. On ſçait 1°. qu'un *Bataillon* eſt un Corps de troupes, ſervant ou combattant à pied.

508. 2°. Que tout Corps de troupes rangé pour combattre ou pour l'exercice militaire, eſt compoſé de *rangs* & de *files*.

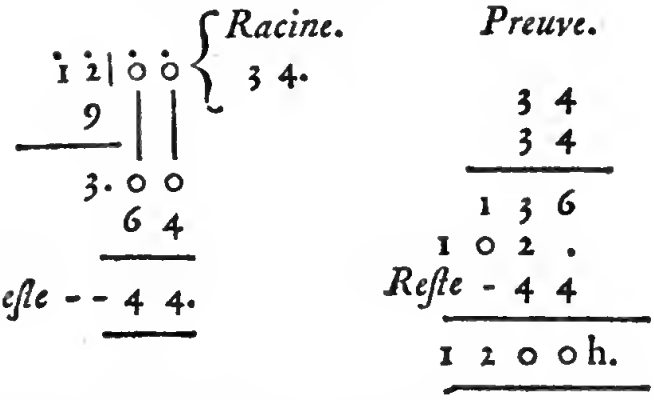
509. Que le *rang* eſt une ſuite de Soldats rangés à côté les uns des autres ſur la même ligne droite, & faiſant face vers le même côté.

510. Que les *files* ſont pluſieurs Soldats placés les uns derriere les autres, auſſi ſur la même ligne droite, de maniere que chaque file ſoit perpendiculaire au rang où elle commence, & à celui où elle ſe termine.

511. Cela poſé, un Bataillon quarré eſt celui dont le nombre d'hommes de chaque rang eſt égal à celui de chaque file. Ainſi s'il y a huit hommes dans un rang, il y en aura un pareil nombre dans la file : Comme toutes les files dans l'arrangement ordinaire des troupes ſont perpendiculaires aux rangs ; il eſt évident que lorſque les rangs ſont égaux aux files, le Bataillon eſt alors un quarré d'hommes.

512. D'où il ſuit, que lorſqu'un nombre d'hommes eſt donné pour en faire un bataillon quarré, il ne faut qu'en extraire la racine quarrée, & que cette racine eſt le nombre d'hommes de chaque côté du Bataillon.

513. Soit donc le nombre donné de 1200 hommes, dont on veut faire un Bataillon quarré. Il faut extraire la racine quarrée de 1200, laquelle ſera trouvée de 34, avec le reſte 44. Otant donc de 1200, 44, il reſtera 1156 hommes pour former le bataillon quarré, dont chaque côté ſera de 34 hommes. A l'égard des 44 hommes reſtant, on peut les employer ailleurs, ou les placer dans les environs du Bataillon.



514. Un pareil Bataillon eſt appellé à *centre plein* *; ceux de cette eſpece étoient les ſeuls en uſage avant le dernier ſiecle ; mais depuis on les a fait plus communément à *centre vuide*. On prétend que le Prince de *Naſſau* a été un des premiers qui s'en ſoit ſervi.

515. Le Bataillon quarré à centre vuide (*a*) n'a pas plus de difficulté dans ſa formation, que celui à centre plein. Un exemple ſuffira pour en donner une idée.

516. Soit un nombre d'hommes quelconque, comme 1200, dont on veut faire un Bataillon quarré à centre vuide, de maniere que le côté du quarré vuide ait, par exemple, douze hommes.

517. Il faut retrancher deux unités du nombre 12, parce que le côté du quarré vuide, s'il étoit rempli d'hommes,

* Cette ſorte de Bataillon eſt peu d'uſage dans la *tactique* ou l'arrangement actuel des troupes. M. le Chevalier *de Folard* eſt preſque le ſeul des Militaires qui en penſe avantageuſement. Il paroît aſſez généralement mépriſé des autres. 1°. Parce que le feu de l'ennemi, principalement celui du canon, y peut faire un très-grand déſordre. Et 2°. Parce que les Soldats du centre du bataillon ne peuvent ſe ſervir que très-difficilement de leur feu contre l'ennemi.

(*a*) Ce Bataillon eſt fort renommé & fort en uſage. Il préſente également à l'ennemi des Soldats de tous côtés.

d'hommes, en contiendroit deux de moins que le dernier rang intérieur de la partie du quarré qui eſt remplie. Otant donc 2 de 12, il reſte 10, qu'il faut quarrer, & l'on aura 100, que l'on ajoutera au nombre donné 1200. Ces deux nombres ajoutés enſemble donneront 1300, dont on extraira la racine quarrée, qu'on trouvera être 36. Il reſtera quatre hommes qu'on pourra placer dans le centre du Bataillon.

Racine.
1 3 | 0 0 } 3 6.
9 | |
4.0 0
6 6
Reſte - 4.

518. Préſentement pour former le Bataillon, je conſidere que s'il étoit plein, & qu'il fût de 1300 hommes, toutes les files & tous les rangs ſeroient de 36 hommes : Mais il doit y avoir un vuide dans le milieu du Bataillon de 10 hommes; donc dans cet endroit les files n'auront que 26 hommes, c'eſt-à-dire 36 moins 10. Mais ces dix hommes doivent diminuer également les *demi-files* * du milieu; elles n'auront donc chacune que 13 hommes. D'où il ſuit, que dans cet exemple il n'y aura dans le Bataillon que 13 rangs de 36 hommes, à commencer de la tête & de la queue du Bataillon, & de la droite à la gauche. Arrangeant ainſi le Bataillon, il reſtera le vuide demandé; & alors chaque côté du quarré intérieur ſera de douze hommes, c'eſt-à-dire, de

* C'eſt ainſi qu'on appelle la moitié d'une file.

deux hommes de plus à chaque côté, que le côté 10 n'en a.

519. Pour la preuve, il ſuffit de conſiderer qu'ayant ajouté au nombre propoſé le nombre d'hommes qu'occuperoit l'eſpace qu'on veut laiſſer vuide dans le Bataillon, on peut alors regarder le nombre propoſé, augmenté de ce dernier, comme le nombre d'hommes dont il faut extraire la racine quarrée; laquelle racine donnera le nombre des hommes, des rangs, & des files d'un tel quarré: Or, retranchant vers le milieu le nombre qu'on a ajouté à chaque file, il reſtera pour le Bataillon, diſpoſé en quarré, le nombre d'hommes qui avoit été d'abord propoſé. Ce qui eſt évident.

520. On peut par cette même méthode, lorſqu'un nombre d'hommes eſt donné, en former un bataillon quarré qui paroiſſe d'un bien plus grand nombre d'hommes. Car ſi l'on a, par exemple, 1200 hommes dont on veuille former un bataillon quarré qui paroiſſe de 3000, on extraira la racine quarrée de ce dernier nombre, laquelle ſera trouvée de 54 avec un reſte 84 qu'on peut négliger. Ce nombre ſeroit celui des hommes de chaque rang & de chaque file d'un bataillon quarré à centre plein de 3000. Mais comme on a ajouté 1800 hommes au nombre donné 1200, il faut retrancher du dedans de l'intérieur du bataillon l'eſpace qu'occuperoient ces 1800 hommes. Pour cela, il faut extraire la racine quarrée de 1800, laquelle eſt 42. C'eſt le nombre d'hommes qu'il faut retrancher des files du milieu du Bataillon plein. Ces files ſont de 54, deſquelles ôtant 42, il reſte 12, dont la moitié 6 eſt le nombre des rangs de la tête & de la queue du Bataillon, de même que de ceux de la droite & de la gauche. Ainſi par cette formation, les 1200 hommes

donnés occuperont l'eſpace d'un Bataillon à centre plein de 3000, & ils ſeront rangés ſur 6 de hauteur ou de files, ſur chaque côté du Bataillon.

REMARQUE.

521. Comme on n'a pas deſſein de traiter dans cet ouvrage, de la formation des troupes, on ne parlera pas de la maniere de changer un Bataillon ordinaire, c'eſt-à-dire celui qui eſt en rectangle, en bataillon quarré, ſans le rompre. On renvoye pour ce mouvement au *Traité de l'Art de la Guerre*, par feu M. le Maréchal de Puyſegur. On trouvera dans cet ouvrage les principes des *évolutions* ou des mouvemens des troupes, expliqués avec tout le détail néceſſaire pour en donner une parfaite intelligence. On obſervera ſeulement ici que la ſcience des évolutions eſt abſolument utile à tous les Officiers, & qu'elle peut s'acquérir très-facilement à l'aide d'un peu de Géometrie.

II.

De l'Extraction de la Racine cube.

522. LE *cube* d'un nombre eſt le produit du quarré de ce nombre par lui-même, ou ce qui eſt la même choſe, par la racine de ſon quarré. Ainſi le cube de 8 eſt le produit du quarré de 8, qui eſt 64 par le nombre 8, lequel produit eſt 512.

523. On appelle *racine cube* ou *cubique* le nombre qui a ſervi à former le cube : Ainſi dans l'exemple qu'on vient de donner, 8 eſt la racine cube de 512.

524. Il ſuit de-là, que la formation du cube ou d'un

nombre cubique eſt aiſée, puiſqu'il ne s'agit que d'une multiplication réitérée. Mais lorſqu'un nombre eſt donné comme nombre cubique, & qu'il faut en chercher la racine, c'eſt-à-dire, un nombre dont le quarré multiplié par ſa racine faſſe ce nombre, il y a beaucoup plus de difficulté.

525. On procedera dans cette opération comme dans celle de l'extraction de la racine quarrée, c'eſt-à-dire, qu'on donnera d'abord la pratique de l'opération, enſuite dequoi on en démontrera les principes.

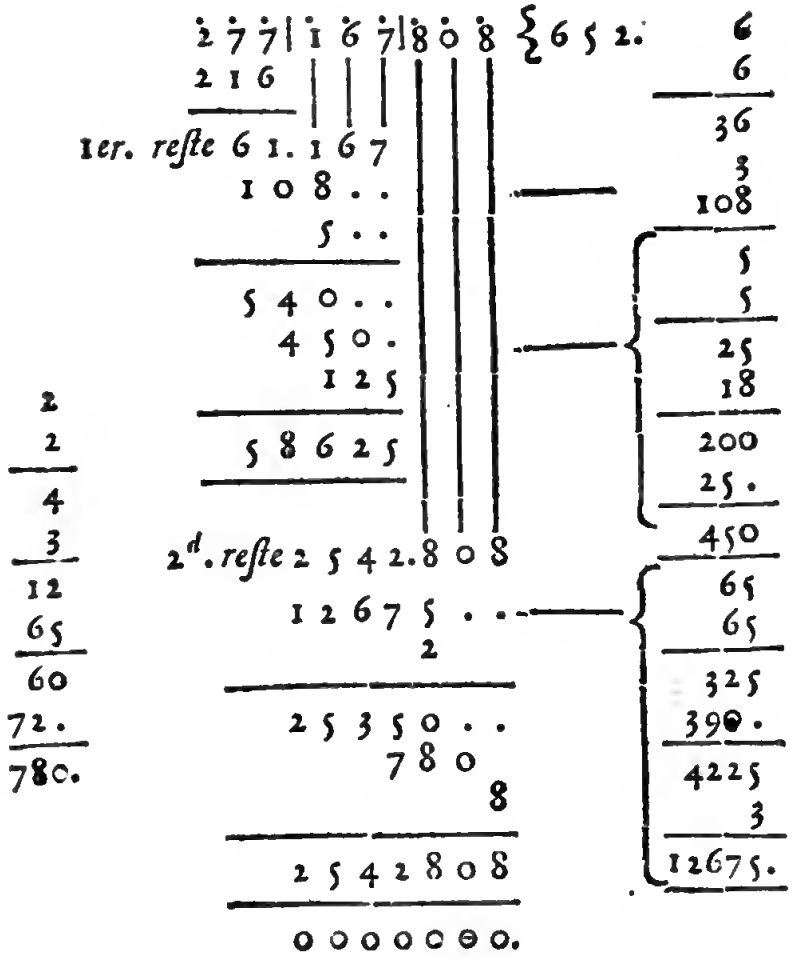
526. Avant de commencer l'extraction de la racine cube, il faut ſçavoir par cœur le cube des neuf premiers chiffres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9. Pour qu'on puiſſe les apprendre plus aiſément, on les met ici ſous leur racine.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Suppoſant à préſent qu'il faille extraire la racine cube d'un nombre quelconque, comme 27716780 8.

527. 1°. On le partagera d'abord en tranches de 3 en 3 chiffres, en commençant par la droite & allant vers la gauche. La derniere à gauche en contiendra 1 ou 2, ou 3, ſuivant le nombre des chiffres du nombre donné : Dans cet exemple, cette derniere tranche a trois chiffres. On tirera enſuite un petit arc vers la droite du nombre donné, pour ſéparer les chiffres du quotient ou de la racine des chiffres du nombre propoſé.

528. 2°. On obſervera que la racine a toujours autant de chiffres qu'il a de tranches dans le nombre propoſé.



529. 3°. Pour trouver le premier chiffre de la racine, on prend la racine du plus grand cube, contenu dans la premiere tranche à gauche, c'eſt-à-dire, dans cet exemple, du nombre 277. Le plus grand cube contenu dans ce nombre eſt 216, dont la racine eſt 6, qu'on poſe au quotient; le cube 216 ſe poſe ſous les trois chiffres de cette premiere tranche; on le ſouſtrait enſuite des chiffres de cette tranche, & on écrit deſſous le reſte 61, comme on le voit dans l'exemple.

530. 4°. On abbaiſſe la ſeconde tranche 167 à côté

côté du reſte 61, ce qui donne le nombre 61,167. Enſuite pour trouver le ſecond chiffre de la racine, on quarre le premier 6, ce qui donne 36, qu'on multiplie par trois, & l'on a 108, qui ſervira de diviſeur au nombre 61,167, c'eſt-à-dire, au reſte de la premiere tranche, joint avec la ſeconde.

531. On poſera le diviſeur 108 ſous 61,167 de maniere que le chiffre 8 des unités ſoit placé ſous le chiffre 1 des centaines de la ſeconde tranche, ou dans la troiſiéme colomne du dividende 61,167, & les autres ſous les chiffres du premier reſte, ſuivant leur ordre numérique, en allant vers la gauche.

532. Cela fait, on cherchera combien le dividende 61,167 contient le diviſeur 108 : Mais il faut obſerver qu'*il doit contenir non-ſeulement le produit du ſecond chiffre de la racine par 108, mais encore le quarré de ce ſecond chiffre multiplié par le triple du premier, & plus le cube du même ſecond chiffre.* Je ſuppoſe 5, c'eſt-à-dire, que comme dans la diviſion ordinaire, je dis ; En 6 combien de fois 1, & que j'écris 5 au quotient.

Pour m'aſſurer que ce chiffre eſt celui que je cherche, ou qu'il eſt le ſecond de la racine, je multiplie d'abord 108 par 5, ce qui donne 540 pour produit ; enſuite ſon quarré 25 par le triple du nombre 6, premier chiffre de la racine, c'eſt-à-dire par 18, ce qui me donne le produit 450, que je poſe ſous le premier produit 540, en l'avançant d'une colomne vers la gauche, de maniere que le premier chiffre zero ſoit dans la colomne des dixaines du dividende 61,167. Je poſe auſſi le cube de 5, qui eſt 125 ſous le ſecond produit 450, mais de façon que le chiffre 5 des unités de ce cube ſoit dans la colomne des unités du dividende, & les autres dans

les autres colomnes en allant vers la gauche, & ſuivant leur ordre numérique.

Il faut après cela additionner les trois produits 540, 450, & 125, obſervant que le premier 540 vaut 54000 dans les colomnes où il eſt poſé, que le ſecond 450, vaut 4500, & le dernier ſeulement 125, parce qu'il occupe les trois dernieres colomnes du dividende 61,167. L'addition de ces produits donne 58625, moindre que le dividende 61, 167; ainſi il peut en être ſouſtrait. Faiſant la ſouſtraction, c'eſt-à-dire, ôtant du dividende 61,167, le nombre 58625, on a le reſte 2542.

533. Cette opération fait voir que le ſecond chiffre de la racine eſt 5. Car ſi on avoit ſuppoſé qu'il eût été 6, en formant avec 6 les differens produits qu'on vient de faire avec 5 & de la même maniere, la ſomme de ces produits auroit été plus grande que le dividende 61,167; ainſi ils n'auroient pû en être retranchés, ce qui auroit fait voir que 6 étoit trop grand.

534. Pour trouver le troiſiéme chiffre de la racine ou celui des unités, on abbaiſſera la troiſiéme tranche 808 à côté du dernier reſte 2542, & l'on aura 2542,808 pour le nombre ſur lequel il reſte à opérer.

On quarre à part le nombre 65, valeur des deux premieres parties de la racine, on multiplie leur quarré 4225 par 3, & on poſe le produit 12675 ſous le dividende, en l'avançant de deux colomnes vers la gauche, enſorte que le chiffre 5 des unités de ce produit, ſoit ſous le chiffre 8 des centaines du dividende, & les autres en allant vers la gauche, ſuivant leur ordre numérique.

On cherche enſuite combien le chiffre 2, le plus élevé du dividende, ou le premier de la gauche,

contient le premier 1 de la gauche du diviſeur. On ſuppoſe, dans cet exemple, qu'il le contient deux fois, ou que 2 eſt le troiſiéme chiffre de la racine. On poſera donc 2 à la racine, & encore ſous le chiffre 5, qui eſt le premier de la droite du diviſeur. On multipliera le diviſeur par 2, & l'on aura le produit 25350. Il faut enſuite quarrer le chiffre 2, multiplier ſon quarré 4 par 3, & le produit 12 par la valeur des deux premiers chiffres de la racine, c'eſt-à-dire par 65, ce qui donnera le produit 780, qu'on poſera ſous le précedent, en l'avançant ſeulement d'une colomne vers la gauche, c'eſt-à-dire, enſorte que le premier chiffre zero de ce produit, ſoit dans la colomne des dixaines du dividende, & les autres ſuivant leur ordre numérique en allant vers la gauche. On prendra après cela le cube du dernier chiffre 2, qui eſt 8, & on le poſera à la colomne des unités du dividende. Cela fait, on additionnera les trois produits 25350, 780, & 8, obſervant que le premier vaut, ſuivant les colomnes qu'il occupe, 2535000, & le ſecond 7800: On aura pour la ſomme de ces trois produits 2542808 qui ſe trouve égale au dividende. Ainſi retranchant ces produits du dividende, il ne reſtera rien, & parce qu'il n'y a plus de tranches à abbaiſſer, l'opération eſt achevée; comme elle ſe fait ſans reſte, il s'enſuit que le nombre propoſé 27167808 eſt un cube parfait, dont la racine eſt 652.

535. On en fera la preuve en cubant la racine 652, c'eſt-à-dire, en l'élevant d'abord au quarré, & en multipliant ſon quarré par ſa racine, comme on le voit ci-après.

652
652

1304
3260.
3912..

Quarré de 652 - - 425104
652

850208
2125520.
2550624..

Preuve - - - 277167808.

REMARQUES.

I.

536. Si l'on avoit plus de trois tranches dans un nombre proposé pour en extraire la racine cube, on opéreroit sur la quatriéme & la cinquiéme, &c. tranche, de la même maniere qu'on l'a fait sur la seconde & sur la troisiéme dans l'exemple qu'on vient de donner.

II.

537. Il y a un tatonnement à faire pour trouver le second, le troisiéme, & les autres chiffres de la racine cube, comme il y en a dans l'extraction de la racine quarrée pour trouver les deuxiémes & troisiémes chiffres; celui de la racine cube est un peu plus difficile à cause de la somme de trois produits qu'il faut toujours retrancher du dividende; mais le grand usage de l'opération donne lieu de connoître assez facilement les chiffres que l'on cherche.

Pour ſe conduire avec méthode dans le tatonnement dont il s'agit, on peut d'abord ſuppoſer que le premier chiffre du dividende contient le premier du premier diviſeur (qui eſt le triple du quarré des chiffres trouvés) autant de fois qu'il eſt poſſible, & multiplier enſuite à part, le premier diviſeur par le chiffre qu'on ſuppoſe être le chiffre de la racine qu'on cherche : Poſer le produit ſous le dividende, en l'avançant de deux colomnes vers la gauche, quarrer enſuite ce chiffre, multiplier ſon quarré par trois, & enſuite par les premiers chiffres de la racine, & poſer ce dernier produit ſous le premier, en l'avançant d'une unité vers la gauche ; enfin, ajoutant à ces deux produits le cube du chiffre qu'on a ſuppoſé être le chiffre cherché de la racine, & additionnant les deux produits dont on vient de parler avec ce cube, ſi leur ſomme n'eſt pas plus grande que le dividende, ce chiffre eſt celui qu'on cherche ; ſi elle eſt plus grande, il faut le diminuer d'une unité, & reformer les produits qui doivent être retranchés du dividende de la même maniere, & continuer ainſi à le diminuer, juſqu'à ce que ces produits ne ſoient pas plus grands que le dividende.

III.

538. Il doit toujours y avoir autant de chiffres dans la racine, qu'il y a de tranches dans le nombre donné ; c'eſt pourquoi, ſi aprés avoir mis 1 ou l'unité pour un chiffre de la racine, les differens produits de ce chiffre par ceux qui ſont déja trouvés, leſquels doivent être retranchés du dividende, ſe trouvoient plus grands que le dividende, il faudroit alors mettre zero à la racine à la place de l'unité, abbaiſſer la tranche ſuivante, & continuer l'opération à l'ordinaire, comme on vient de le preſcrire.

IV.

539. Ce qui reſte à chaque opération, ajouté avec la tranche qu'on a abbaiſſée à côté, ſe conſidere toujours comme un nombre ſeparé des autres tranches, de maniere que le premier chiffre de la droite de chaque tranche que l'on abbaiſe, ſe regarde comme placé à la colomne des unités du dividende.

V.

540. On avance toujours de deux colomnes vers la gauche le produit du quarré des chiffres de la racine déja trouvés multiplié par 3, que l'on poſe pour diviſeur ſous le dividende de chaque opération, parce que ces chiffres devant être precedés à droite, du chiffre que doit produire la derniere tranche abbaiſſée, ils valent dix fois plus que le nombre qu'ils expriment, le premier étant cenſé occuper la colomne des 10es, & les autres, les autres colomnes ſupérieures. Ainſi en les quarrant, il faut avoir égard au zero que l'on néglige, qui produiroit deux colomnes de plus dans le quarré : Il faut donc en conſéquence laiſſer vuide la place de ces deux zeros, lorſque l'on poſe ſous le dividende le produit du quarré de ces chiffres, multiplié par 3, pour ſervir de diviſeur, ou bien remplir la place de ces zeros par des points, comme on l'a fait dans l'exemple précedent. C'eſt par cette même raiſon que le triple du quarré du chiffre que produit au quotient la derniere tranche abbaiſſée, multiplié par le premier ou par les autres chiffres de la racine déja trouvés; que ce produit, dis-je, ſe poſe ſous le précedent, enſorte que ſon premier chiffre de la droite ſe trouve dans la colomne des dixaines du dividende; car les chiffres déja trouvés devant être précedés à droite d'un

autre chiffre ou du zero, doivent augmenter d'une colomne le nombre qu'ils multiplient; & cette colomne qui répond à celle des unités du dividende, eſt marquée par un point dans l'exemple précedent.

VI.

541. Lorſque le nombre propoſé pour en extraire la racine cube, n'eſt pas un cube parfait, il y a un reſte à la derniere opération, & alors ayant élevé la racine trouvée au cube, il faut avant de faire l'addition des differens produits qui forment ce cube, leur ajouter ce reſte, pour trouver le nombre propoſé, c'eſt-à-dire, pour avoir la preuve de l'opération.

DEMONSTRATION de l'Extraction de la Racine cube.

542. Pour démontrer cette opération, & ſçavoir d'abord ce qui donne lieu de partager le nombre dont on veut extraire la racine cube en tranches de trois en trois chiffres, il faut

543. 1°. Remarquer que tout nombre, exprimé par un chiffre, en aura au plus trois dans ſon cube; que tout nombre exprimé par deux chiffres en aura au moins 4, & au plus 6; que tout nombre exprimé par trois chiffres en aura au moins 7, & au plus 9, &c. C'eſt ce qu'on peut démontrer en ſe ſervant de la même méthode qu'on a employé pour l'extraction de la racine quarrée *. Ce qui fait donc voir qu'en partageant un nombre quelconque, donné en tranches de trois en trois chiffres, en allant de droite à gauche, le nombre de ces tranches donne d'abord celui des chiffres de la racine qu'on cherche, ſoit qu'il y ait un, ou 2, ou 3 chiffres dans la premiere tranche de la gauche.

* N°. 485.

544. 2°. Que le cube de tout nombre conſideré comme compoſé de deux parties, *eſt égal au cube de ſa premiere partie ; plus à trois quarrés de cette premiere partie, multipliés par la ſeconde ; plus à trois quarrés de la ſeconde, multipliés par la premiere ; & enfin, plus au cube de cette ſeconde partie.*

Ainſi pour avoir le cube de 10, que je puis conſiderer comme compoſé de 9 & de 1, il faut faire voir qu'il eſt compoſé du cube de 9, qui eſt 729 ; plus de trois quarrés de 9 qui font trois fois 81, multipliés par la ſeconde partie 1 ; plus à trois produits du quarré de 1, qui eſt 1, multipliés par la premiere partie 9, & plus enfin au cube de 1, qui eſt 1. Et c'eſt ce qui eſt évident par l'addition de ces differens produits qu'on voit ci-après, leſquels valent 1000, c'eſt-à-dire le cube de 10. Car 10, multiplié par 10 donne 100, qui multiplié auſſi par 10 donne le cube de 10, qui eſt 1000.

Cube de 9 - - - - - - - - -	729
Trois quarrés de 9 *qui font* 243, *multipliés par* 1, *font* - - - - -	243
Trois quarrés de 1 *qui font* 3, *multipliés par* 9 *font* - - - - -	27
Le cube de 1 *eſt* - - - - - -	1
Cube de 10 - - -	1000.

545. Pour rendre cette propoſition encore plus ſenſible, il faut compoſer le cube de la même maniere qu'on a compoſé le quarré N°. 489. pour l'extraction de ſa racine.

Preuve - - - -	10
	10
Quarré de 10 -	100
	10
Cube de 10 -	1000.

Soit pour cela, par exemple, le nombre 34 à élever au cube.

On multipliera d'abord 34 par 34 pour en avoir le quarré, mais en diſtinguant tous les differens produits dont il eſt compoſé. Afin de les faire obſerver plus aiſément, on repréſentera le nombre 30 qui compoſe la premiere partie de 34 par *A*, & le nombre 4 qui eſt la ſeconde par *B*. *A A* repréſentera alors le quarré de 30, & *B B* celui de 4. Le produit de 30 par 4 ſera *A B*.

On diſtinguera de la même maniere les produits qui compoſeront le cube. Ainſi *A A A* ſera le cube de la premiere partie 30. *B B B* celui de la ſeconde 4, & les produits du quarré de la premiere partie par la ſeconde, & du quarré de la ſeconde par la premiere, ſeront marqués par *A A B* & *B B A*.

A. B
34
34

Quarré de 4	16	*B B*	Produits qui compoſent le quarré de 34, & qui étant multipliés par 34 en donnent le cube.
Premier produit de 30 *par* 4	12.	*A B*	
Second produit de 30 *par* 4	12.	*A B*	
Quarré de 30	9..	*A A*	
Multiplicateur des 4 *prod. ci-deſſus* . .	34		

Cube de la ſeconde partie 4	64	*B B B*	Produits qui compoſent le cube de 34.
Per. produit du quarré de 4 *par* 30 .	48.	*B B A*	
Second prod. du quarré de 4 *par* 30,	48.	*B B A*	
Per produit du quarré de 30 *par* 4 . . 3	6..	*A A B*	
3e produit du quarré de 4 *par* 30 . . .	48.	*B B A*	
2d. produit du quarré de 30 *par* 4 . 3	6..	*A A B*	
3e. produit du quarré de 30 *par* 4 . 3	6..	*A A B*	
Cube de la premiere partie 30 . . . 27	...	*A A A*	
Cube de 34 39	304		

Cela posé, le nombre 34 étant ainsi élevé au cube ; il est évident,

1°. Que son cube 39304 contient le cube de la premiere partie 30 ; plus celui de la seconde 4 ; plus trois produits du quarré de la premiere, multipliés par la seconde ; & enfin, plus trois produits du quarré de la seconde, multipliés par la premiere.

Et 2°. Qu'ayant partagé ces produits en deux tranches, en tirant une ligne qui sépare la colomne des centaines de celle des milles, le cube de la premiere partie de la racine se trouve dans la premiere tranche de la gauche, & que le reste de cette tranche, jointe à la suivante, contient les trois produits du quarré de la premiere partie, multipliés par la seconde, &c.

D'où il suit, que l'opération prescrite pour extraire la racine cube d'un nombre quelconque, décompose ce cube de la même maniere qu'il a été formé.

Car pour la premiere partie de la racine, on a pris la racine cube du plus grand cube, contenue dans la premiere tranche à gauche ; & pour trouver la seconde, on a cherché un chiffre dont le produit par le triple du quarré du premier, plus le quarré de ce second chiffre, multiplié par le triple de la premiere partie, ou du premier chiffre de la racine, & enfin, plus son cube, puissent être retranchés du reste de la premiere tranche de la gauche, jointe à la suivante à droite.

Ainsi par cette opération, on a décomposé le nombre proposé de la même maniere qu'il se trouve formé ou composé de ses differens produits. C'est pourquoi les deux chiffres trouvés par l'opération sont les deux parties de la racine cubique du cube composé de deux tranches.

Si le nombre proposé pour en extraire la racine cube a trois tranches, sa racine aura trois chiffres * ; Mais on pourra alors regarder les deux premiers comme la premiere partie de la racine, & le troisiéme comme la seconde. Car il est évident que si l'on a un nombre quelconque, comme 345, composé de trois chiffres, on peut le considerer comme composé des deux premiers à gauche 3 & 4, qui valent ensemble 340, & du troisiéme 5. C'est pourquoi ayant trouvé les deux premiers chiffres de la racine d'un nombre qui doit avoir trois chiffres à cette racine, il faut les regarder comme étant ensemble la premiere partie de la racine, & opérer pour trouver la seconde ou le troisiéme chiffre de la même maniere qu'on l'a fait pour le second. Si la racine doit avoir quatre chiffres, c'est-à-dire, si le nombre cubique donné a quatre tranches, les trois premiers chiffres trouvés à la racine, seront regardés comme faisant ensemble la premiere partie de cette racine, & le quatriéme la seconde, & ainsi de suite. * N°. 543.

D'où il suit, que la démonstration que l'on vient de donner de l'extraction de la racine cube d'un nombre qui a deux tranches, peut s'appliquer à tous les autres nombres qui auront une plus grande quantité de tranches.

MOYEN d'approcher aussi près qu'on le voudra de la Racine cube des nombres qui ne seront pas des cubes parfaits, ou dont l'extraction de la racine aura un reste.

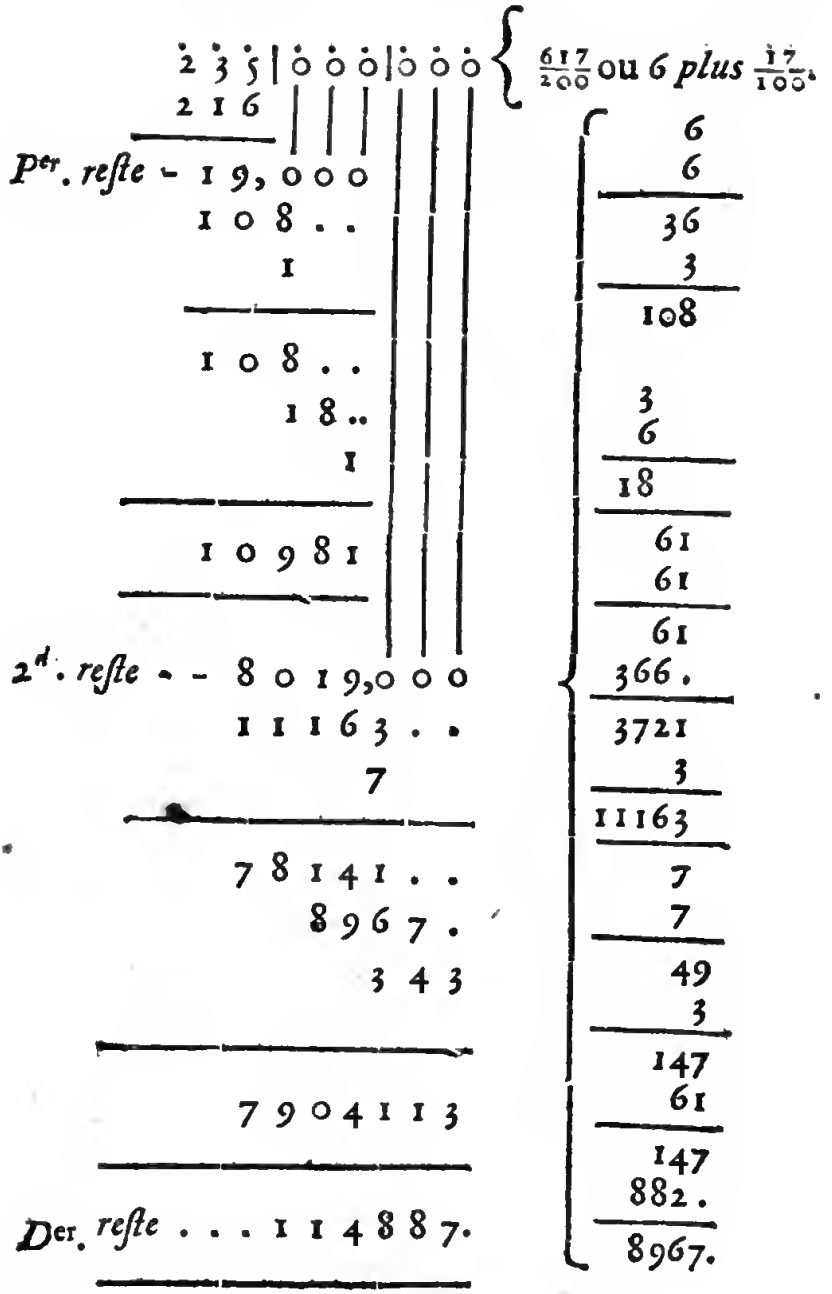
546. Il faut ajouter au nombre donné deux ou trois &c. tranches de trois zeros chacune; faire ensuite l'opération à l'ordinaire; négliger le reste qu'on aura, après avoir operé sur la derniere tranche, & diviser le quotient ou les chiffres trouvés à la racine

par l'unité précedée à droite d'autant de zeros qu'on a ajouté de tranches au nombre propoſé, c'eſt-à-dire par 10, ſi on a ajouté ſeulement une tranche; par 100 ſi on en a ajouté 2; par 1000, ſi on en a ajouté 3 &c.

Application de cette méthode à un exemple.

547. Soit le nombre 235 dont on veut extraire la racine cube. Il eſt clair qu'elle eſt entre 6 & 7. Car le cube de 6 eſt 216, plus petit que 235; & le cube de 7 eſt 343 plus grand que 235: Ainſi 6 eſt trop petit, & 7 eſt trop grand.

Pour approcher de la vraie racine cube de 235, j'ajoute deux tranches de trois zeros à ce nombre, & j'ai 235,000,000 dont j'extrais la racine cube, ſuivant la méthode preſcrite au premier exemple. Cette racine eſt 617, laquelle étant diviſée par 100, attendu qu'on a ajouté deux tranches de trois zeros, ſera $\frac{617}{100}$ ou 6 plus $\frac{17}{100}$ qui ne differe pas de la vraie racine d'un centiéme. Car ſi au lieu de 7 on avoit mis 8 pour le dernier chiffre de la racine, on auroit trouvé ce chiffre trop grand: Ainſi 6 plus $\frac{18}{100}$ ſeroit donc plus grand que la racine cherchée; mais 6 plus $\frac{17}{100}$ eſt plus petit à cauſe du reſte: Donc ce nombre ne differe pas de la vraie racine d'un centiéme. Si on avoit ajouté trois tranches, on auroit eu la vraie racine à un milliéme près.


2 3 5 | 0 0 0 | 0 0 0
2 1 6
Per. reſte - 19,000
108..
1
108..
18..
1
10981
2d. reſte - - 8019,000
11163..
7
78141..
8967.
343
7904113
Der. reſte ... 114887.
617/200 ou 6 plus 17/100.
6
6
36
3
108
3
6
18
61
61
61
366.
3721
3
11163
7
7
49
3
147
61
147
882.
8967.

DÉMONSTRATION de cette approximation.

548. Cette démonſtration eſt à peu près la même que celle qui a ſervi à la racine quarrée *. Elle eſt fondée ſur ce principe.

* Nº. 502.

549. *Que ſi on multiplie le cube d'un nombre quelconque, par un autre cube auſſi quelconque, la racine du premier ſe trouve multipliée dans le produit par celle du ſecond.*

Or, ajoutant trois zeros à un nombre, c'eſt le multiplier par 1000 *, qui eſt le cube de 10; & lui ajoutant ſix zeros, ou deux tranches de trois chiffres, c'eſt le multiplier par 1000000, qui eſt le cube de 100, &c. Donc la racine du nombre donné qu'on trouve après l'addition de ces differentes tranches, eſt multiplié, ou par 10 ou par 100, ſuivant les tranches ajoutées; Donc il faut la diviſer ou par 10 ou par 100, &c. pour avoir la valeur de la racine cherchée.

* Arith. Nº. 52 & 53.

De l'Extraction de la Racine cube des fractions.

550. Pour extraire la racine cube d'une fraction, il faut d'abord la réduire à ſes moindres termes; enſuite extraire la racine cube de ſon numérateur, & celle de ſon dénominateur, & l'on aura une nouvelle fraction, qui ſera la racine cube de la fraction propoſée. Ce qui eſt évident.

Ainſi pour extraire la racine cube de la fraction $\frac{16}{54}$, on la réduit d'abord à ſes moindres termes $\frac{8}{27}$; on prend la racine cube de 8, qui eſt 2, & celle de 27 qui eſt 3, & l'on a la fraction $\frac{2}{3}$ pour la racine cube de la propoſée $\frac{16}{54}$.

REMARQUES.

I.

551. Si les termes des fractions dont on veut extraire la racine cube ne ſe trouvent pas des cubes parfaits, on leur ajoute pluſieurs tranches de zeros, & l'on en trouve enſuite la racine approchée, comme on vient de l'enſeigner.

II.

552. Si l'on veut extraire la racine cube d'un nombre compoſé d'entiers & de fraction, on réduit les entiers en fraction, & on les joint avec la fraction dont ils ſont accompagnés ; on extrait après cela la racine cube de la fraction, qui contient les entiers & la fraction du nombre propoſé.

III.

553. On fait la preuve de l'extraction de la racine cube des fractions, comme celle des entiers, c'eſt-à-dire, en cubant la racine trouvée, &c.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE VII.

I.

Des Rapports & des Proportions.

554. L'OBJET de ce Livre eſt d'enſeigner les differentes manieres de comparer la grandeur ou quantité, & de donner les principales proprietés qui en réſultent.

555. On a déja dit qu'on appelle *grandeur* ou *quantité* tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution.

REMARQUE.

556. Il n'y a ni grandeur ni petiteſſe abſolue, c'eſt-à-dire, de quantité abſolument grande ou petite, en la comparant avec toutes les autres quantités de même eſpece qu'on peut imaginer. Une quantité

tité n'eſt grande qu'en la comparant à une plus petite, & elle n'eſt petite, qu'en la comparant à une plus grande. Ainſi on ne peut juger des quantités, que ſelon le rapport qui ſe trouve entr'elles.

557. Pour comparer deux quantités, il faut qu'elles ſoient de même eſpece, comme une ligne avec une ligne, une ſuperficie avec une autre ſuperficie, un poids avec un autre poids, &c. Ces quantités de même nature, ſont appellées *homogenes*; celles de differente nature, comme par exemple, le tems & la péſanteur, ſont appellées *héterogenes*.

558. On appelle *rapport* ou *raiſon*, la comparaiſon de deux quantités de même eſpece.

559. Toute comparaiſon exige néceſſairement deux termes, c'eſt pourquoi tout rapport eſt compoſé de deux termes.

560. Le premier terme du rapport ſe nomme *antecedent*, parce qu'il précede le ſecond, & celui-ci ſe nomme *conſéquent*, parce qu'il ſuit le premier terme.

Si l'on compare 8 avec 4, 8 ſera l'antecedent, & 4 ſera le conſéquent.

Deux quantités peuvent ſe comparer de deux manieres; ſçavoir,

561. 1°. En conſidérant combien le premier terme contient de fois le ſecond ou de parties du ſecond.

562. Et 2°. En conſidérant l'excès d'un terme ſur l'autre, c'eſt-à-dire, la difference des deux termes du rapport.

Par exemple, dans la comparaiſon de 8 à 4, je puis conſiderer combien 8 contient de fois 4, & quelle eſt la difference de 8 à 4.

563. La premiere comparaiſon ſe nomme *raiſon* ou *rapport géometrique*: Ainſi ce rapport eſt celui dans lequel on conſidere combien de fois l'antécedent con-

tient ſon conſéquent, ou de parties de ſon conſéquent.

664. La ſeconde comparaiſon ſe nomme *raiſon* ou *rapport arithmetique* : Enſorte que ce rapport eſt celui dans lequel on conſidere la difference de l'antécedent & du conſequent.

REMARQUE.

565. On ne traitera point à préſent du rapport arithmétique, mais ſeulement du géometrique, & l'on obſervera que lorſqu'on parle de rapports, ſans y ajouter le terme d'Arithmetique, c'eſt toujours du rapport géometrique dont on entend parler.

566. Avant d'expliquer la théorie des rapports, il faut donner les définitions ſuivantes.

DEFINITIONS.

567. On appelle *Tout* une quantité quelconque, à l'égard d'une autre plus petite qu'elle contient.

568. On appelle *partie aliquote* une quantité qui eſt contenue pluſieurs fois exactement dans celle que l'on nomme ſon Tout. Et partie *aliquante* celle qui n'eſt pas exactement contenue dans ſon Tout.

Ainſi 1, 2, 4, & 8, ſont parties aliquotes de 8, mais 3, 5 & 7 en ſont des parties aliquantes.

569. Il ſuit de ce qu'une aliquote eſt contenue pluſieurs fois dans ſon tout, qu'elle le meſure, puiſqu'il n'eſt autre choſe que cette partie multipliée par le nombre de fois qu'il l'a contient.

Par exemple, 3 eſt partie aliquote, ou ſimplement aliquote de 21, puiſqu'elle y eſt contenuë 7 fois exactement : Or : 7 multiplié par 3 fait 21 : Donc, &c.

570. Une quantité qui eſt contenue pluſieurs fois exactement dans pluſieurs Touts differens, eſt appellée *aliquote commune* de ces Touts.

571. Ainſi 2 eſt aliquote commune de 8 & de 10; & 3, de 9, de 12 & de 15, &c. & l'unité eſt aliquote commune de tous les nombres, puiſqu'ils ne ſont compoſés que de l'unité répetée pluſieurs fois.

572. On appelle *aliquotes pareilles* ou *ſemblables* de pluſieurs Touts, les quantités qui y ſont contenues exactement le même nombre de fois.

Ainſi les aliquotes ſemblables de 8 & de 12 ſont 2 & 3; 4 & 6; 8 & 12. Car 2 eſt contenue quatre fois dans 8, comme 3 l'eſt quatre fois dans 12 : 4 eſt contenue deux fois dans 8, comme 6 l'eſt deux fois dans 12; & enfin 8 eſt contenue une fois dans 8, comme 12 l'eſt une fois dans 12.

573. Il ſuit de cette définition, que les moitiés, les tiers, les quarts, les cinquiémes, &c. parties de pluſieurs Touts differens, en ſont les aliquotes ſemblables, ces parties étant contenues le même nombre de fois dans leurs Touts.

574. Un Tout eſt appellé *multiple* de ſon aliquote, & celle-ci eſt *ſous-multiple* de ſon tout.

575. Deux touts qui contiennent le même nombre d'aliquotes ſemblables, ſont appellées *Equimultiples* de ces aliquotes.

Ainſi, 8 eſt multiple de 2, & 2 eſt ſous-multiple de 8. Et 12 & 8 ſont équimultiples de 3 & de 2, de 4 & de 6, &c.

576. Les quantités qui n'ont point d'aliquote commune, ſont appellées *incommenſurables*.

II.

Expreſſions abregées dont on ſe ſervira pour démontrer la théorie des Rapports & des Proportions.

577. POUR démontrer généralement les propriétés des rapports & des proportions, on ſe ſervira des lettres de l'Alphabet pour repréſenter les quantités dont on parlera. Ces lettres ne déſignant aucune quantité particuliere, peuvent repréſenter généralement toutes ſortes de quantités.

578. Pour marquer l'addition d'une grandeur avec une ou pluſieurs autres quantités, on ſe ſervira de ce ſigne + qui veut dire *plus* : Enſorte que pour exprimer l'addition de la quantité *a* ajoutée avec *b*, ou avec celle qui eſt repréſentée par *b*, on écrira $a+b$ qui veut dire *a plus b*. De même $a+b+c+d$. veut dire *a plus b*, *plus c*, & *plus d*; c'eſt-à-dire, que cette expreſſion repréſente l'addition des quatre quantités *a*, *b*, *c*, & *d*.

579. On ſe ſervira de ce ſigne —, qu'on nomme *moins*, pour marquer qu'une quantité eſt ſouſtraite ou retranchée d'une autre.

Ainſi $a-b$. qu'on énonce par *a moins b*, exprime que la quantité *b* eſt ôtée de *a* : Enſorte, que ſi on ſuppoſe que *a* ſoit égal, par exemple, à ſept unités, & *b* à 4, l'on aura pour la valeur de $a-b$, $7-4$. qui eſt 3, ou la difference des deux quantités 7 & 4.

De même $a-b-c$, exprime que de la quantité *a*, on retranche les deux quantités repréſentées par

b & c ; il en ſeroit de même d'un plus grand nombre de quantités.

580. Pour exprimer le produit de deux ou d'un plus grand nombre de quantités, on les joindra enſemble par une petite croix de S. André ×, ou bien on les joindra enſemble ſans aucun intervalle, ou de la même maniere que ſi on vouloit écrire un mot avec les lettres qui repréſenteront ces quantités.

On exprimera donc le produit de a & b par $a \times b$, qui veut dire a, *multiplié par* b, ou bien l'on écrira ſimplement ab. Le produit des trois quantités a, b, c, s'exprimera de même par abc ; celui de $2a$ par c, ſera $2ac$. Il en ſera de même du produit d'un plus grand nombre de quantités.

581. On exprimera la diviſion d'une grandeur par une autre, en écrivant le diviſeur ſous le dividende, & en les ſéparant l'un de l'autre par une petite ligne droite.

Ainſi, pour marquer que la quantité repréſentée par a eſt diviſée par la quantité b, on écrira $\frac{a}{b}$ qui s'énonce par a, *diviſé par* b. Cette expreſſion peut s'appeller *diviſion indiquée*.

Si l'on ſuppoſe que a ſoit égal à 12, & b à 3, l'expreſſion $\frac{a}{b}$ ſera la même que celle-ci $\frac{12}{4}$, qui eſt égale à 3 : Car 12, diviſé par 4, eſt 3. Si l'on a auſſi le produit $2aac$, dont on veuille prendre le tiers, ou ce qui eſt la même choſe, qu'on veuille diviſer par 3, on écrira $\frac{2aac}{3}$, & ainſi des autres.

582. Lorſque le dividende contiendra pluſieurs lettres, parmi leſquelles ſe trouveront celles du diviſeur, le quotient ſera alors les lettres du dividende qui ne ſe trouveront pas dans le diviſeur.

Ainſi le quotient de ab diviſé par a, ou la valeur de l'expreſſion $\frac{ab}{a}$ ſera b, lettre du dividende qui ne ſe trouve pas dans le diviſeur. Ce qui eſt évident, puiſque ce quotient b multiplié par le diviſeur a donne le dividende ab *.

* Arith. N°. 38.

On aura de même pour le quotient de la quantité $bdmn$ diviſée par bd, les lettres mn que le dividende contient de plus que celles du diviſeur. Ce qui ſe prouve encore, en conſidérant que $mn \times bd = bdmn$ donc $\frac{bdmn}{bd} = mn$.

583. Pour marquer l'égalité de pluſieurs grandeurs ou de pluſieurs produits, on ſe ſervira de ce ſigne $=$ qui veut dire *égal*, & qu'on appelle par cette raiſon *ſigne d'égalité*.

Ainſi pour exprimer que la quantité repréſentée par a eſt égale à celle qui eſt repréſentée par b, on écrira $a=b$, qui s'énoncera par *a égal b*. De même $ab+bc=bd+fg$ exprime que les deux produits ab & bc, ſont égaux aux deux autres bd & fg. Il en ſeroit de même d'un plus grand nombre de produits qu'on auroit de part & d'autre du ſigne d'égalité.

584. Pour indiquer la racine d'une quantité quelconque, on ſe ſervira de ce ſigne $\surd$, qu'on nomme *ſigne radical*. Il précede à gauche les quantités dont on veut indiquer la racine.

585. Si l'on veut indiquer la racine quarrée, on écrit un 2 dans le radical de cette maniere $\sqrt[2]{}$: Ainſi $\sqrt[2]{ab}$ exprime la racine quarrée du produit ab.

586. Si c'eſt la racine cube que l'on veut indiquer, on poſe un 3 dans le radical : Enſorte, que $\sqrt[3]{aab}$ exprime la racine cube de aab.

587. Lorſqu'il n'y a point de chiffre dans le radical, on ſous-entend qu'il y a un 2, c'eſt-à-dire, que c'eſt la racine quarrée qui eſt indiquée par le radical.

588. Lorſqu'il y a pluſieurs quantités jointes enſemble par les ſignes plus & moins, & qu'elles ſont précedées du ſigne radical à gauche, on tire une ligne depuis le radical, ſur toutes les quantités dont l'extraction de la racine eſt indiquée.

Par exemple, $\sqrt{aa - bb}$ indique la racine quarrée de aa moins bb, & $\sqrt{aab} - bb$ indique ſeulement la racine quarrée de aab, dont on retranche le produit ou quarré bb.

589. Pour exprimer le quarré d'une ligne quelconque, marquée ou terminée par les deux lettres A & B, on tirera une petite ligne droite au-deſſus de ces deux lettres, & l'on écrira un 2 à ſon extrémité à droite : Enſorte, que $\overline{AB}^{2}$ exprimera le quarré de la ligne AB, c'eſt-à-dire, le produit de $AB \times AB$. Si l'on veut en indiquer le cube, on écrira un 3 à la place du 2 au bout de la ligne de cette maniere $\overline{AB}^{3}$. Cette expreſſion indiquera alors le cube de AB, c'eſt-à-dire que $\overline{AB}^{3} = AB \times AB \times AB$.

590. On exprimera de même le quarré ou le cube d'une quantité quelconque, repréſentée par a, ou par quelque autre lettre priſe à volonté, en écrivant un 2 ou un 3 au-deſſus de cette lettre, & un peu vers ſa droite; ſçavoir, un 2 pour en marquer le quarré, & un 3 pour en exprimer le cube. Ainſi $a^3 = aa$, & $a^3 = aaa$.

591. Il eſt évident que a eſt la racine quarrée de aa*, & que la même lettre a eſt la racine cube de

* N°. 469.

* N°. 523. $a^{\frac{3}{}}$*. Car $a \times a = aa = a^{3}$, & $a \times a \times a = aaa = a^{3}$.

D'où il ſuit, que $\sqrt{aa} = a$ & $\sqrt[3]{aaa} = \sqrt[3]{a^{3}} = a$.

III.

Des Rapports ou Raiſons géometriques.

592. LE Rapport géometrique étant celui dans lequel on conſidere combien l'antécedent contient de fois ſon conſequent, ou combien il con-
* N°. 163. tient de parties du même conſéquent *, ſi l'on a le rapport de 3 à 4, il conſiſtera donc dans le nombre des parties de 4, que 3 contiendra; & comme 3 contient trois fois 1, qui eſt le quart de 4, on énoncera le rapport de 3 à 4 en diſant, qu'il conſiſte en ce que l'antécedent 3, contient trois fois le quart de ſon conſequent 4. Si l'on a de même le rapport de 2 à 5, il conſiſtera en ce que l'antecedent 2 contient deux fois 1, c'eſt-à-dire, deux fois la cinquiéme partie de 5.

593. Il ſuit de-là, qu'un rapport peut être exprimé par la diviſion de l'antécedent par le conſequent.

Car pour ſçavoir combien l'antécedent contient de fois ſon conſequent, ou quelle partie il eſt du même conſequent, il eſt clair qu'il faut le diviſer par le conſequent, & que le quotient exprime en quoi conſiſte le rapport. Ce quotient ſe nomme par cette raiſon, l'*expoſant du rapport.*

Si l'on a, par exemple, le rapport de 8 à 2, pour ſçavoir en quoi il conſiſte, on diviſera 8 par 2, & le quotient ou l'expoſant 4, fera connoître que l'an-

técedent contient quatre fois ſon conſequent.

594. Si l'on a de même le rapport de 3 à 8 ; diviſant 3 par 8, c'eſt-à-dire, écrivant le conſequent 8 ſous l'antécedent 3 * de cette maniere $\frac{3}{8}$, & tirant une petite ligne droite entre ces deux nombres, cette expreſſion $\frac{3}{8}$ ſera l'expoſant ou la valeur du rapport de 3 à 8, & elle exprimera la huitiéme partie de 3.

* N°. 581.

Pour le démontrer, conſiderez que 1, diviſé par 8, eſt la huitiéme partie de l'unité ou $\frac{1}{8}$ qu'on exprime par un huitiéme ; que 2 diviſé par 8 ou $\frac{2}{8}$ exprime la huitiéme partie de 2, & qu'ainſi 3 diviſé par 8 ou $\frac{3}{8}$ exprime la huitiéme partie de 3.

Si l'on conſidere à préſent que la huitiéme partie de 3 eſt la même choſe que les trois huitiémes de 8, puiſque 1 étant la huitiéme partie de 8, trois en eſt les trois huitiémes ; on verra que $\frac{3}{8}$, qui exprime la huitiéme partie de 3, exprime également les trois huitiémes de 8, & qu'ainſi en même-tems qu'elle donne la valeur du rapport de 3 à 8, elle fait connoître auſſi en quoi conſiſte ce rapport, c'eſt-à-dire, que l'antecedent 3 contient trois fois la huitiéme partie de ſon conſequent.

Comme il en ſera de même de tout autre rapport, ſoit que l'antécedent ſoit plus grand ou plus petit que le conſequent, il s'enſuit généralement,

595. Que tout rapport de deux quantités quelconques, exprimé par deux lettres auſſi quelconques a & b, peut être repreſenté par la diviſion indiquée de l'antécedent par le conſequent, c'eſt-à-dire par $\frac{a}{b}$

REMARQUE.

596. Tout rapport pouvant être exprimé par $\frac{a}{b}$, ſi on appelle q l'expoſant de ce rapport, ou le quotient de a diviſé par b, on aura $\frac{a}{b} = q$. Et com-

me dans toute diviſion le quotient multiplié par le diviſeur eſt égal au dividende *, on aura $a = bq$, ce qui fait voir que l'antécedent a d'un rapport eſt égal au produit du conſequent, & de l'expoſant du même rapport, & qu'ainſi il peut être exprimé par ce produit.

* Arith. N°. 98.

Si $a = 12$, & $b = 4$, on aura $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3 = q$: Ainſi dans cet exemple, la valeur de q ou de l'expoſant ſera 3.

Si l'on a de même le rapport de 2 à 7, c'eſt-à-dire, ſi $a = 2$ & $b = 7$, on aura alors $\frac{a}{b} = \frac{2}{7} = q$. Ce qui fait voir que l'expoſant de ce rapport eſt le quotient de la diviſion indiquée de l'antécedent a par ſon conſequent.

Si l'on multiplie $\frac{a}{b}$ par b ou $\frac{2}{7}$ par 7, ce qui ſe fait en multipliant l'antécedent ou le dividende a ou 2 par le conſequent b ou 7 (a), on aura pour le produit, $\frac{ab}{b}$* $= a = \frac{2 \times 7}{7} = \frac{14}{7} = 2$. D'où il ſuit.

* N°. 582.

697. Que dans tous les cas, c'eſt-à-dire, ſoit que l'antécedent ſoit plus grand ou plus petit que ſon conſequent, on aura toujours l'antécedent égal au produit de l'expoſant par le conſequent; ce qu'il eſt important de bien remarquer.

(a) *Voyez* dans le Traité d'Arithmetique N. 216 & ſuivans la maniere de multiplier une fraction par un nombre entier. Il eſt évident que tout rapport eſt une fraction, & qu'ainſi c'eſt la même choſe de multiplier un rapport par un nombre entier, que de multiplier une fraction de la même maniere.

IV.

Des differentes eſpeces de Rapports géometriques.

598. IL y a pluſieurs eſpeces de rapports ; ſçavoir, des *rapports égaux* &d'*inégaux* ; des rapports *d'égalité ; de plus grande inégalité*, & *de moindre inégalité* ; & enfin des rapports *exacts* & de *ſourds*.

599. Les rapports égaux ſont ceux dont les antécedens contiennent également leurs conſequens, ou le même nombre d'aliquotes ſemblables de leurs conſequens ; ou bien ce ſont ceux qui ont des expoſans égaux.

Si l'on a le rapport de 8 à 4, & celui de 6 à 3, les deux antécedens 8 & 6 contenant chacun leurs conſequens 4 & 3 deux fois, il s'enſuit qu'ils ſont égaux.

Les rapports de 3 à 9, & de 4 à 12 ſont auſſi égaux. Car les aliquotes ſemblables des conſequens 9 & 12, ſont 1 & 3 * : Or, le premier antécedent 3 contient trois fois 1, comme le ſecond 9 contient trois fois 3 : Donc les antécedens de ces deux rapports contiennent le même nombre d'aliquotes ſemblables de leurs conſequens : Donc ſuivant la définition des rapports égaux, ils ſont égaux. * N°. 572.

600. Pour connoître généralement ſi deux rapports propoſés, comme celui de 3 à 7, & celui de 12 à 28, ſont égaux, il faut prendre les plus petites aliquotes ſemblables des conſequens, qui ſont 1 & 4. Car 7 contient ſept fois 1, comme 28 contient ſept fois 4 : Il faut examiner enſuite ſi les antécedens

3 & 12 contiennent le même nombre de ces aliquotes: Or, 3 contient trois fois 1, comme 12 contient trois fois 4 : Donc les antécedens 3 & 12 contiennent le même nombre d'aliquotes ſemblables de leurs conſequens : Donc les rapports propoſés ſont égaux *.

* N°. 599

On en uſera de même pour tous les autres rapports, dont on cherchera à connoître l'égalité.

601. Ceux qui ſçauront le calcul des fractions pourront, pour examiner ſi deux ou un plus grand nombre de rapports ſont égaux, ſe ſervir de cette méthode.

On mettra les rapports en fraction, & on les réduira à leurs plus ſimples ou plus petits termes *; Alors ſi les fractions ſont égales, les rapports qu'elles exprimeront le ſeront auſſi, mais étant égales elles ſe réduiront toutes à la même fraction, c'eſt-à-dire au même expoſant: Donc les rapports qu'elles repréſenteront ſeront égaux *.

* Voyez le Traité d'Arit. N°. 173.

* 559.

Si l'on a les rapports de 4 à 6, & de 14 à 21; on les exprimera par ces deux fractions $\frac{4}{6}$ & $\frac{14}{21}$, qui étant réduites à leurs moindres termes, deviendront $\frac{2}{3}$ & $\frac{2}{3}$, qui ſont évidemment des fractions égales. D'où il ſuit, que les rapports de 4 à 6, & de 14 à 21 qu'elles repréſentent, ſont des rapports égaux. En effet, 4 contient deux fois 2, qui eſt le tiers de 6, comme 14 contient deux fois 7, qui eſt le tiers de 21.

REMARQUE.

602. On dit qu'un rapport eſt réduit à ſes plus ſimples termes, lorſque ſes deux termes n'ont que l'unité pour commun diviſeur : Ainſi 2 & 3 ſont les plus ſimples termes du rapport de 14 à 21, parce qu'ils n'ont l'un & l'autre que l'unité pour commun diviſeur.

Les plus ſimples termes qui peuvent exprimer un rapport en ſont auſſi appellés les *expoſans* : Ainſi 2 & 3 ſont les expoſans du rapport de 14 à 21, de même que du rapport de 4 à 6.

603. On appelle rapport d'égalité celui qui a ſes deux termes égaux, ou ce qui eſt la même choſe, celui qui a l'unité pour expoſant : Ainſi le rapport de 4 à 4 eſt un rapport d'égalité, de même que celui de 7 à 7, &c.

604. Le rapport de plus grande inégalité eſt celui dont l'antécedent eſt plus grand que le conſequent. Suivant cette définition, le rapport de 9 à 3 eſt un rapport de plus grande inégalité, de même que celui de 15 à 4, &c.

605. Le rapport de plus grande inégalité, dans lequel l'antécedent eſt double du conſequent, eſt appellé *rapport double* ; celui dans lequel il eſt triple, eſt appellé *rapport triple*, &c. Ainſi le rapport de 8 à 4 eſt double, celui de 9 à 3 eſt triple, &c.

606. Le rapport de moindre inégalité eſt celui dans lequel l'antécedent eſt moindre que ſon conſequent ; tel eſt le rapport de 6 à 9. Si l'antécedent eſt la moitié du conſequent, le rapport eſt *ſous-double ;* il eſt *ſous-triple*, ſi l'antécedent en eſt le tiers, &c.

607. On appelle rapport exact celui dans lequel l'antécedent contient exactement le conſequent, ou quelques-unes de ſes aliquotes, ou en géneral celui dont on peut exprimer l'expoſant.

608. Le rapport ſourd eſt celui dans lequel on ne peut exprimer quelle partie l'antécedent contient du conſequent, ou ce qui eſt la même choſe, c'eſt celui dont les deux termes n'ont aucune aliquote commune, ſi petite qu'elle puiſſe être imaginée.

On a appellé quantités incommenſurables celles qui n'ont point d'aliquote commune ; ainſi on peut

dire que le rapport ſourd eſt celui de deux quantités de cette eſpece.

REMARQUE.

609. Il n'y a point de rapports ſourds entre les nombres entiers, puiſqu'ils ont tous l'unité pour commune meſure * : Il n'y en a point non plus entre les fractions ; car comme elles peuvent ſe réduire au même Dénominateur, les Numérateurs expriment alors quel eſt le rapport des fractions ; mais il y en a entre les racines des quarrés & des cubes imparfaits, c'eſt-à-dire, qui n'ont point de nombres entiers pour racines. Il y en a auſſi dans la Géometrie, & l'on démontrera à la fin de ce Livre, que le rapport de la diagonale d'un quarré au côté du même quarré, eſt de cette eſpece. Pour cela, on fera voir que ces deux lignes ſont incommenſurables, ou qu'elles n'ont point de commune meſure.

* N°. 571.

610. Comme le rapport conſiſte dans ce que l'antécedent eſt à ſon conſequent : Il ſuit de-là, que plus l'antécedent eſt grand par rapport à ſon conſequent, & plus le rapport eſt grand : Enſorte, que le rapport eſt infiniment grand, ſi l'antécedent eſt infiniment grand par rapport à ſon conſequent, & qu'il eſt de même infiniment petit, ſi l'antécedent eſt infiniment petit par rapport à ſon conſequent.

Ainſi le rapport de 6 à 4 eſt plus grand que celui de 6 à 5, ou que celui de 5 à 4. Car dans le premier, l'antécedent 6 contient ſix fois le quart de ſon conſequent 4 : Dans le ſecond, il ne contient que ſix fois la cinquiéme de ſon conſequent ; & dans le troiſiéme, l'antécedent ne contient que cinq fois le quart du conſequent 4.

611. Il ſuit de-là, qu'on peut augmenter ou diminuer un rapport de deux manieres ; ſçavoir,

612. 1°. En augmentant l'antécedent, ſans toucher au conſequent, & en diminuant le conſequent ſans toucher à l'antécedent.

613. 2°. En diminuant l'antécedent ſans toucher au conſequent, & en augmentant le conſequent ſans toucher à l'antécedent.

Car ſi l'on a le rapport de 6 à 9, dans lequel l'antécedent contient ſix fois la neuviéme partie de ſon conſequent, il eſt clair qu'en ajoutant une quantité quelconque à 6 comme 2, le rapport de 8 à 9 ſera plus grand que celui de 6 à 9 : Et en ôtant, par exemple, 2 de 9, le rapport de 6 à 7 ſera plus grand que celui de 6 à 9. Car 6 contient ſix fois la ſeptiéme partie de 7, & il ne contient que le même nombre de fois la neuviéme partie de 9, qui eſt plus petite : Donc, &c.

De même ôtant de l'antécedent 6, une quantité quelconque 2, ſans rien diminuer du conſequent 9, le rapport de 4 à 9 ſera évidemment plus petit que celui de 6 à 9. Car 6 contient ſix fois 1, qui eſt la neuviéme partie de 9 ; & 4 ne contient que quatre fois la même neuviéme partie. Si l'on augmente le conſequent 9, par exemple de 2, ſans augmenter l'antécedent 4, on aura encore le nouveau rapport de 6 à 11, qui en réſultera plus petit que celui de 6 à 9. Ce qui eſt évident.

614. On peut conclure de-là, que les rapports ou raiſons ſont de véritables grandeurs. Car ſuivant la définition de la grandeur, elle eſt tout ce qui peut être augmenté ou diminué * : Or, on vient de voir que les rapports peuvent être augmentés & diminués : Donc ils ſont de véritables grandeurs : Donc toutes les proprietés de la grandeur ou quantité doivent leur convenir.

* N°. 555.

615. D'où il ſuit, que les rapports égaux expri-

ment des grandeurs égales, & les inégaux d'inégales.

THEOREME I.

616. Les rapports égaux à un même rapport, ſont égaux entr'eux.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les rapports expriment des grandeurs ou quantités *, & que les grandeurs égales à une même grandeur, ſont égales entr'elles *: Donc, &c.

* N°. 614.
N°. 14.

Ainſi, ſi le rapport de *a* à *b* eſt égal à celui de *c* à *d*, & que celui de *f* à *g* ſoit égal au même rapport, on aura le premier rapport égal au troiſiéme: En effet, ſi *a* eſt par exemple les deux tiers de *b*, *c* ſera pareillement les deux tiers de *d* & *f*, auſſi les deux tiers de *g*: Donc *a* ſera à *b* comme *f* eſt à *g**.

* N°. 599.

OBSERVATION.

617. Pour marquer que deux quantités quelconques ſont entr'elles comme deux autres quantités, ou qu'elles font un rapport égal à celui des deux dernieres quantités, on écrit les deux rapports ſur la même ligne, on les ſépare par quatre points, mis en quarré de cette maniere: : & on met un point entre les deux quantités de chaque rapport. Ce point ſignifie *eſt à*, & les quatre points, *comme*: Enſorte, que *a. b* : : *c. d*, s'exprime, en diſant que *a eſt à b*, *comme c eſt à d*, & de même 3. 5 : : 24. 40. s'exprime en diſant que 3 eſt à 5, comme 24 eſt à 40.

On ſe ſervira dans la ſuite de cette expreſſion abregée, pour marquer l'égalité de deux ou d'un plus grand nombre de rapports.

THEOREME II.

THEOREME II.

618. *Les grandeurs ou quantités qui ont un même rapport à une même quantité, ſont égales entr'elles.*

Cette propoſition eſt évidente par la définition des rapports égaux. Car dans ces rapports, les antécedens contiennent leurs conſequens le même nombre de fois, ou le même nombre d'aliquotes ſemblables de ces conſequens *. Or, les grandeurs qui contiennent le même nombre de fois une autre grandeur, ou la même partie de cette grandeur, ſont égales entr'elles : Donc, &c.

* N°. 599.

Si par exemple a eſt ſuppoſé les deux tiers de c, & b auſſi les deux tiers de la même quantité c, il eſt clair que $a = b$.

COROLLAIRE.

619. Il ſuit de-là, que ſi l'on a deux rapports égaux dans leſquels les conſequens ſoient égaux, les antécedens le ſeront également.

Car alors ils auront un même rapport à une même quantité. Ainſi ſi $a . b :: c . b$. l'on en conclura que $a = c$.

LEMME ou PRINCIPE

Pour la démonſtration des propoſitions ſuivantes.

620. *Les grandeurs ſont entr'elles comme la ſomme de toutes les parties qui les compoſent.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les grandeurs ou quantités ſont égales à toutes leurs parties priſes enſemble *, c'eſt-à-dire, à toutes celles dont elles ſont compoſées ; &

* N° 11.

qu'ainſi elles ſont entr'elles comme la ſomme de ces parties. C. q. f. d.

PREMIER COROLLAIRE.

621. Il ſuit de ce principe, que ſi l'on a deux, ou un plus grand nombre de quantités differentes, repréſentées par *a* & *b*, & que toutes les parties de la premiere *a* ayent le même rapport à toutes celles de la ſeconde *b*, le rapport de *a* à *b* ſera le même que celui de ces parties; c'eſt-à-dire, que les Touts ſeront entr'eux comme les parties qui les compoſent.

Si l'on ſuppoſe, par exemple, que toutes les parties de *a* ſoient chacune les deux tiers ou le quart de toutes les parties de *b*; il eſt évident que *a* ſera auſſi les deux tiers ou le quart de *b*: Donc, &c.

Il en ſera de même de tous les autres rapports, qu'on ſuppoſera entre *a* & *b*.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

622. D'où il ſuit, que les Touts ſont en même raiſon que leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, & en géneral, que leurs aliquotes ſemblables.

Car les moitiés, les tiers & les quarts, ſont les parties qui compoſent les Touts; mais comme elles y ſont contenues le même nombre de fois, elles en ſont les aliquotes ſemblables *: Or, les Touts ſont en même raiſon que les parties qui les compoſent †: Donc ils ſont entr'eux comme leurs moitiés, leurs tiers, & leurs quarts, & en géneral que leurs aliquotes ſemblables. C. q. f. d.

* N°. 572.
† N°. 621.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

623. Il ſuit encore du même principe, que les moitiés, les tiers, les quarts, & en géneral les aliquotes ſemblables de pluſieurs Touts, ſont en même

raiſon que ces Touts, ou ce qui eſt la même choſe, que leurs équimultiples.

Car il eſt évident que ſi un Tout quelconque *a* eſt double ou triple d'un autre Tout *b*, la moitié ou le tiers du premier ſera double ou triple de la même partie du ſecond ; c'eſt-à-dire, que le rapport de ces parties ſera le même que celui des Touts. Mais les moitiés, les tiers, & les quarts de pluſieurs Touts en ſont les aliquotes ſemblables * : Donc ces aliquotes ſont entr'elles comme les Touts, ou comme leurs équimultiples, qui ſont les Touts qui les contiennent également. C. q. f. d.

* N°. 73.

THEOREME III.

624. Si on multiplie, ou ſi l'on diviſe les deux termes d'un rapport par une même quantité, on ne change point le rapport.

DEMONSTRATION.

Soit le rapport de *a* à *b*, ou celui de 4 à 12. Je dis d'abord que ſi on mulriplie les deux termes *a* & *b* par une même quantité *c*, ou 4 & 12 par un même nombre quelconque 3, on ne changera pas le rapport ; c'eſt-à-dire, qu'on aura *ac*. *bc*:: *a*. *b*. ou 12. 36 :: 4. 12.

a	.	*b*			
c	.	*c*			
ac	.	*bc* ::	*a*	.	*b*.
4	.	12			
3	.	3			
12	.	36 ::	4	.	12.

Pour cela, conſiderez qu'en multipliant les deux termes du rapport propoſé, par une même quanrité *c* ou 3, les produits *ac* & *bc*, 12 & 36 qui en réſulteront, contiendront *a* & *b* également, de même que 4 & 12. D'où il ſuit, que ces quantités en ſeront les

* N°. 572. aliquotes ſemblables * : Or, les Touts ſont en même
* N°. 622. raiſon que leurs aliquotes ſemblables * : Donc ac. bc :: a. b. & 12. 36 :: 4. 12. C. q. f. d.

Pour démontrer enſuite qu'en diviſant les deux termes d'un rapporr par une même quantité, on n'en change pas le rapport, c'eſt-à-dire, que les quotiens qui en réſultent ont le même rapport que les deux termes propoſés, ou que $\frac{a}{c}$. $\frac{b}{c}$ :: a . b.

Il faut conſidérer que les quantités a & b étant diviſées par la même quantité c, les quotiens indiqués par $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ ſont les parties ou les aliquotes ſem-
* N°. 572. blables de a & de b * : Or, les aliquotes ſemblables
* N°. 623. ſont en même raiſon que leurs Touts * : Donc, &c.

On démontrera de même que $\frac{4}{3}$. $\frac{12}{3}$ :: 4. 12.

THEOREME IV.

625. Si l'on ajoute aux deux termes d'un rapport, ou ſi l'on en retranche deux quantités qui ayent le même rapport, les ſommes ou les differences de ces quantités auront le même rapport que les deux termes du propoſé.

EXPLICATION.

626. On dir qu'on ajoute aux deux termes d'un rapport deux quantités, ou ce qui eſt la même choſe, qu'on additionne deux rapports, lorſqu'on joint enſemble les antécedens d'une part, & les conſequens d'une autre.

627. On dit de même qu'on retranche des deux termes d'un rapport deux autres quantités, ou un autre rapport, lorſqu'on ôte une de ces quantités de l'antécedent du premier rapport, & qu'on retranche l'autre quantité de ſon conſequent.

Ainſi, ſi l'on a le rapport de a à b, & celui de c à

d, joignant enſemble les antécedens a & c, & de même les conſequens b & d, on aura pour la ſomme de ces deux rapports celui de $a+c$ à $b+d$, & celui de $a-c$ à $b-d$ ſera le rapport de leur difference. Ceci poſé : Il faut démontrer,

1°. Que ſuppoſant que $a.\ b::c.\ d.$ c'eſt-à-dire, que les deux quantités c & d ayent entr'elles le même rapport que les deux premieres a & b, l'on aura $a+c.\ b+d::\ a.\ b.$

Et 2°. Que, ſuppoſant toujours $a.\ b::c.\ d.$, l'on aura auſſi $a-c.\ b-d::\ a.\ b.$

DEMONSTRATION de la premiere partie.

Conſiderez que les deux parties a & c qui compoſent $a+c$, ayant chacune le même rapport aux deux autres b & d, dont $b+d$ eſt formé, les ſouts $a+c$ & $b+d$ auront entr'eux le même rapport que ces parties *; c'eſt-à-dire, que l'on aura $a+c.\ b+d::\ a.\ b.$ C. q. f. d. * N°. 621.

Si l'on ſuppoſe que $a=6$, $b=8$. $c=3$ & $d=4$, on aura $a+c=6+3=9$ & $b+d=8+4=12$: Or $9.\ 12::\ 6.\ 8.$

Car les deux parties 6 & 3 qui compoſent 9, étant chacune les trois quarts des deux parties 8 & 4 qui compoſent 12, la ſomme de ces deux premieres parties doit être les trois quarts de celle des deux dernieres : Donc ces ſommes doivent être entr'elles comme une des parties de la premiere eſt à la partie correſpondante de la ſeconde : Et en effet, 9 eſt les trois quarts de 12, comme 6 eſt les trois quarts de 8 : Donc, &c.

DEMONSTRATION de la ſeconde partie.

Pour démontrer cette ſeconde partie, il faut faire voir que $a-c.\ b-d::\ a.\ b.$

Pour cet effet, conſiderez que toutes les parties ſemblables qui compoſent les Touts ou les quantités *a* & *b*, ayant entr'elles le même rapport que ces quantités *, ſi on retranche de chaque Tout un nombre égal de ces parties, ou ce qui eſt la même choſe, ſi l'on en retranche des grandeurs *c* & *d* qui ayent le même rapport que ces Touts, les reſtes auront encore le même rapport que les mêmes Touts *a* & *b* : Mais ces reſtes ſeront *a*—*c* & *b*—*d* : Donc on aura *a*—*c*. *b*—*d* :: *a*. *b*. C. q. f. d.

* Nº. 623.

Si l'on ſuppoſe, par exemple, que *a* ſoit trois fois plus grand que *b*, toutes les parties de *a*, ſeront triples des mêmes parties qui compoſeront *b*. Si donc on ôte de *a* une partie quelconque, & qu'on ôte en même-tems de *b* une partie trois fois plus petite que celle qu'on a retranchée de *a*; il eſt évident que toutes les parties qui reſteront dans *a* ſeront encore triples de celles qui reſteront dans *b*. Mais ces parties ou ces reſtes donnent la difference des rapports égaux de *a* à *b*, & de *c* à *d* * : Donc *a*—*c* ſera à *b*—*d*, comme *a* eſt à *b*, c'eſt-à-dire, que ces reſtes ſeront comme les Touts *a* & *b* : Donc, &c.

* Nº. 627.

Si on ſuppoſe que *a*=12, *b*=16, *c*=6 & *d*=8. 12 étant dans cette ſuppoſition les trois quarts de 16, toutes les parties de 12 ſeront les trois quarts des mêmes parties de 16 ; mais 6 étant auſſi les trois quarts de 8, ôtant 6 de 12, & 8 de 16, on ôte de 12 les trois quarts de ce qu'on ôte de 16 ; c'eſt pourquoi ce qui reſtera de 12, c'eſt-à-dire 6, ſera encore les trois quarts de ce qui reſtera de 16, c'eſt-à-dire de 8; & en effet, 6. 8 :: 12. 16.

COROLLAIRE.

Il ſuit de la premiere partie du Théorême précedent,

628. *Que ſi l'on ajoute enſemble pluſieurs rapports égaux, la ſomme de tous les antécedens eſt à celle de tous les conſéquens, comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſéquent.*

Car on vient de démontrer qu'en ajoutant aux deux termes d'un rapport deux quantités qui ont le même rapport, on ne change pas le rapport; c'eſt-à-dire, que les nouveaux termes qui en réſultent ſont entr'eux comme ceux du propoſé : Or, ſi à ces nouveaux termes on ajoute ſucceſſivement deux quantités qui ayent le même rapport, ou ce qui eſt la même choſe, un autre rapport égal *; les termes que leur addition donnera, ſeront toujours entr'eux comme ceux du premier rapport; mais ces termes ſeront compoſés de la ſomme des antécedens, & de celle des conſequens de ces rapports * : Donc la ſomme de leurs antécedens ſera à celle de leurs conſequens, comme l'antécedent du premier rapport eſt à ſon conſequent : Mais tous les rapports propoſés étant égaux, chaque antécedent eſt à ſon conſequent en même raiſon que les deux termes du premier rapport : Donc lorſqu'on ajoute enſemble pluſieurs rapports égaux, la ſomme des antécedens eſt à celle des conſequens, comme l'antécedent d'un de ces rapports eſt à ſon conſequent. C. q. f. d.

* N°. 626.

* N°. 626.

Si on ſuppoſe qu'on ait les rapports égaux de 2 à 5; de 6 à 15, & de 12 à 30, dans leſquels chaque antécedent eſt les deux 5mes de ſon conſéquent; additionnant les deux premiers, c'eſt-à-dire, joignant enſemble leurs antécedens, & de même leurs conſequens, l'on aura 8. 20 :: 2. 5 *, & ajoutant au rapport de 8 à 20, celui de 12 à 30, l'on aura auſſi 20. 50 :: 8. 20 :: & par conſéquent comme 2 eſt à 5. Or 20 eſt la ſomme des antécedens des trois rapports, & 50 celle de leurs conſequens : Donc, &c.

* N°. 625.

AUTRE DEMONSTRATION.

Soient les rapports égaux de a à b, de c à d, de f à g, &c. il faut démontrer que la ſomme des antécedens qui eſt $a+c+f$. eſt à celle des conſequens $b+d+g$, comme a eſt à b ou c à d.

Pour cela, conſiderez que les deux quantités $a+c+f$, $b+d+g$ ſont entr'elles comme les parties qui les compoſent * : Or, les trois parties qui forment la premiere de ces quantités ont chacune (à cauſe de l'égalité des rapports) le même rapport avec celles qui compoſent la ſeconde : enſorte, que ſi a eſt, par exemple, le tiers de b, c ſera de même le tiers de d, & f celui de g. D'où il ſuit, que les trois parties de $a+c+f$, étant le tiers des trois autres $b+d+g$ qui forment la ſeconde quantité, la premiere ſera le tiers de la ſeconde ; c'eſt-à-dire, que $a+c+f$ ſera à $b+d+g$, comme un antécedent quelconque a ou c, eſt à ſon conſequent b ou d. Il eſt évident qu'il en ſera de même, quelque ſoit le rapport ou la partie que l'antécedent de chaque rapport contiendra de ſon conſequent, puiſque tous les rapports étant égaux, les antécedens contiendront toujours la même partie de leurs conſequens : Donc, &c.

* N. 620.

IV.

Des Rapports compoſés.

629. UN *Rapport compoſé* eſt celui qui eſt formé de la multiplication de pluſieurs rapports, égaux ou inégaux.

630. Les rapports particuliers, dont le rapport composé est formé, sont appellés *rapports composans* ou *raisons composantes*.

631. Pour multiplier des rapports les uns par les autres, on multiplie ensemble leurs antécedens, & le produit est celui du rapport composé; on multiplie de même leurs consequens, & le produit est le consequent du rapport composé.

Ainsi, pour multiplier le rapport de 5 à 4 par celui de 3 à 8, on multipliera ensemble les antécedens 5 & 3, & de même les consequens 4 & 8, le produit 15 des deux antécedens sera l'antécedent du rapport composé, & celui des deux consequens 32, sera le consequent du même rapport, qui sera celui de 15 à 32.

En génetal, le produit des deux rapports de a à b, & de c à d, sera celui de ac à bd. ou $\frac{ac}{bd}$ *. * N°. 593.

DEMONSTRATION.

Pour le démontrer, il faut faire voir que $\frac{ac}{bd}$ est égal au produit des exposans des rapports proposés. Car ces exposans sont ceux qui exprimen la valeur ou la grandeur du rapport *: Ainsi les multiplier, * N°. 593. c'est multiplier les grandeurs que les rapports représentent, & par conséquent c'est multiplier ces rapports.

Soit x l'exposant du rapport de a à b, c'est-à-dire, soit $x = \frac{a}{b}$, l'on aura $bx = a$ *: soit aussi appellé * N°. 596. y celui du rapport de c à d, l'on aura de même $y = \frac{c}{d}$ & $dy = c$.

Présentement si l'on met à la place du produit

ac dans l'expreſſion $\frac{ac}{bd}$ la valeur de a & de c, c'eſt-à-dire le produit de bx par dy, qui eſt $bdxy$, l'on aura $\frac{ac}{bd} = \frac{bdxy}{bd}$, & comme cette derniere expreſ-

*N°. 581. ſion étant diviſée par bd, donne pour quotient xy *, l'on a donc $\frac{ac}{bd} = xy$. C. q. f. d.

Autre démonſtration par les fractions.

Comme les rapports peuvent s'exprimer par des

*N°. 593 & 594. fractions *, il s'enſuit qu'ils doivent ſe multiplier auſſi de la même maniere que les fractions : Or l'on a vû N. 216 & ſuivans du *Traité d'Arithmetique*, que pour multiplier deux fractions quelconques, comme par exemple $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{8}$, il faut multiplier enſemble leurs numérateurs 2 & 3 pour avoir celui du produit, & leurs dénominateurs 5 & 6 pour avoir le dénominateur du même produit: Donc $\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{5 \times 8} = \frac{6}{40}$: Mais les numérateurs des fractions repréſentent les antécedens des rapports, & les dénominateurs les conſequens : Donc, &c.

632. La démonſtration qu'on vient de donner pour le produit de deux rapports, peut également s'appliquer à un plus grand nombre.

Pour cela, il faut regarder le rapport compoſé $\frac{ac}{bd}$ ou $\frac{6}{40}$ comme un rapport compoſant, & alors pour multiplier ce rapport par un autre, il faudra multiplier enſemble leurs antécedens & leurs conſequens ; le rapport qui en réſultera aura pour antécedent le produit des trois antécedens des rapports compoſans, & pour conſequent le produit de leurs trois conſequens.

Si l'on regarde ce nouveau rapport comme un rapport compoſant, on le multipliera de même par un quatriéme rapport, & le produit par un cinquiéme, & ainſi de ſuite à l'infini. D'où il ſuit,

633. Que pour multiplier enſemble quelque nombre de rapports que ce ſoit, il faut multiplier d'une part tous les antécedens, & de l'autre tous les conſequens, & que le premier produit ſera l'antécedent du rapport compoſé, & le ſecond, le conſequent du même rapport.

Des differentes eſpeces de rapports ou raiſons compoſés.

634. Les rapports qui compoſent un autre rapport, peuvent être inégaux ou égaux.

635. S'ils ſont inégaux, le rapport qui réſulte de leur multiplication, quelque quantité de rapports qu'on ait multiplié enſemble, eſt appellé ſimplement *rapport compoſé.*

636. Un rapport compoſé de deux rapports égaux, eſt appellé *rapport doublé* de chacun de ces rapports; & celui qui eſt compoſé de trois rapports égaux, eſt appellé *rapport triplé* de chacun des rapports compoſans.

637. Les termes des rapports compoſans, qui forment les rapports doublés, ſont dit être en *raiſon ſous-doublée* des termes du rapport doublé; & ceux des raiſons qui forment le rapport triplé, ſont dit être en *raiſon ſous-triplée* des deux termes du rapport triplé.

Ainſi multipliant enſemble les rapports égaux de 4 à 6, & de 2 à 3, le rapport de 8

	4 .	6
	2 .	3
Rapport doublé –	8 .	18.

à 18 qui en réſultera, eſt un rapport doublé de 4 à 6, & de 2 à 3, & les termes de ces deux rapports ſont en raiſon ſous-doublée de 8 à 18.

Si l'on a de même les trois rapports égaux de 1 à 3; de 2 à 6, & de 3 à 9; multipliant d'abord enſemble les deux premiers, on a le rapport de 2 à 18 qui eſt doublé de chacun de ces rapports, lequel étant multiplié par le troiſiéme rapport donne le rapport triplé de 6 à 162. Les raiſons particulieres ou compoſantes de 1 à 3, 2 à 6, &c. ſont ſous-triplées de celle de 6 à 162.

	1	.	3
	2	.	6
Rapport doublé	2	.	18
	3	.	9
Rapport triplé	6	.	162

638. Il ſuit des définitions précedentes, que les quarrés étant formés des racines multipliées par elles-mêmes, ils ſont compoſés de deux rapports égaux, & qu'ainſi ils ſont en raiſon doublée de ces racines, de même que les racines ſont en raiſon ſous-doublée des quarrés; comme auſſi, que les cubes ſont en raiſon triplée de leurs racines, & les racines en raiſon ſous-triplée des cubes.

REMARQUE.

639. Il eſt important de ne pas confondre les raiſons doublées & triplées, ſous-doublées & ſous-triplées, avec les raiſons doubles, triples, ſous-doubles & ſous-triples.

Les raiſons doublées & triplées ſont formées du produit de deux ou trois raiſons égales *; & les raiſons doubles & triples ne conſiſtent qu'en ce que leur antécedent eſt double ou triple du conſequent. Les raiſons ſous-doubles & ſous-triples ſont, pour ainſi dire, les racines des raiſons doublées & triplées *; & les

* N°. 636.
* N°. 605.
* N°. 637.

raiſons ſous-doubles & ſous-triples ne conſiſtent qu'en ce que l'antécedent n'eſt que la moitié ou le tiers du conſequent *. * N°. 606.

THEOREME V.

640. *Les rapports compoſés de même nombre de rapports égaux, ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que multiplier des rapports enſemble, c'eſt multiplier leurs expoſans * : Or, les expoſans de rapports égaux ſont égaux *, les produits formés de même nombre de grandeurs égales ſont évidemment égaux : Donc, &c. * N°. 593 & 631. * N°. 599.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

641. 1°. *Que la raiſon doublée eſt égale à celle des quarrés des termes des raiſons compoſantes, ou que ſes deux termes ſont entr'eux comme les quarrés des termes des raiſons compoſantes.*

Car ſoient les deux raiſons égales ou compoſantes a & b, c & d; la raiſon doublée de ces deux raiſons eſt celle de ac à bd *, & la raiſon des quarrés des deux termes a & b eſt celle de aa à bb : Or, la raiſon de a à b étant égale, par la ſuppoſition, à celle de c à d, les deux raiſons de ac à bd, aa à bb ſont compoſées de deux raiſons égales : Donc par le Théoréme précedent, elles ſont égales : Donc $ac . bd :: aa . bb$. C. q. f. d.

$$\left\{\begin{array}{l} a \;.\; b :: a \;.\; b \\ c \;.\; d :: a \;.\; b \\ \hline ac \;.\; bd :: aa \;.\; bb. \end{array}\right.$$

* N°. 633.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

642. 2°. *Que la raiſon triplée eſt égale à celle des cubes des termes des raiſons compoſantes, ou que les deux termes de cette raiſon ſont entr'eux comme les cubes des termes des raiſons compoſantes ou ſous-triplées.*

Car ſi l'on a les trois raiſons égales de a à b, de c à d, & de f à g, l'on aura la raiſon de $a\,c\,f$ à $b\,d\,g$ égale à celle de a^3 à b^3, ces deux raiſons étant chacune compoſées de trois raiſons égales * : Or a^3 & b^3 ſont les cubes des termes de la raiſon compoſante de a à b : Donc, &c.

$$\left.\begin{array}{l} a \,.\, b :: a \,.\, b \\ c \,.\, d :: a \,.\, b \\ f \,.\, g :: a \,.\, b \end{array}\right\} \quad a\,c\,f \,.\, b\,d\,g :: a^3 \,.\, b^3.$$

* N°. 639.

REMARQUE.

643. Puiſque les deux termes de la raiſon doublée ſont comme les quarrés des termes des raiſons compoſantes *, & que ceux de la raiſon triplée ſont entr'eux comme les cubes des termes des mêmes raiſons * : Il s'enſuit,

* N°. 640.

* N°. 641.

644. Que c'eſt la même choſe de dire *que deux quantités ſont entr'elles en raiſon doublée de deux autres quantités, ou qu'elles ſont comme les quarrés de ces quantités.* Et que c'eſt auſſi la même choſe de dire, *que deux quantités ſont en raiſon triplée de deux autres quantités, ou qu'elles ſont comme les cubes de ces mêmes quantités.*

645. Et de même, puiſque les racines des quarrés ſont en raiſon ſous-doublée des quarrés, & les racines cubiques en raiſon ſous-triplée des cubes * ; c'eſt auſſi la même choſe de dire, *que deux quantités ſont en raiſon ſous-doublée ou ſous-triplée de deux autres,*

* N°. 638.

ou bien qu'elles ſont entr'elles comme les racines quarrées ou cubiques de deux autres.

THEOREME VI.

646. *Si l'on a pluſieurs rapports égaux ou inégaux, dont le conſequent du premier ſerve d'antécedent au ſecond, & le conſequent du ſecond, d'antécedent au troiſiéme, & ainſi de ſuite, & qu'on multiplie tous ces rapports enſemble, la raiſon du premier terme au dernier ſera égale à la raiſon compoſée de tous les rapports.*

Soient les rapports quelconques de a à b; de b à c, & de c à d, il faut démontrer que la raiſon compoſée de ces trois rapports, qui eſt celle de abc à bcd eſt égale à celle de a à d, c'eſt-à-dire, que $abc . bcd :: a . d$.

$$\left\{\begin{array}{l} a . b \\ b . c \\ c . d \\ \hline abc . bcd :: a . d. \end{array}\right.$$

DEMONSTRATION.

Conſiderez qu'en diviſant les deux termes abc, & bcd du rapport compoſé abc, bcd, par une même quantité bc, on ne change rien au rapport *: Or, pour faire cette diviſion, il faut ſeulement ôter bc de chaque terme du rapport *. Alors il ſera exprimé par les deux quantités a & d, qui ſont le premier & le dernier terme des rapports propoſés: Donc lorſqu'on a ainſi de ſuite pluſieurs rapports égaux ou inégaux, le premier terme eſt au dernier en raiſon compoſée de tous les rapports. C. q. f. d.

* N°. 624.

* N°. 582.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition,

647. 1°. *Que ſi l'on a de ſuite deux rapports égaux, comme ceux de* a *à* b, *&* b *à* c, *le premier terme* a *ſera au dernier* c *en raiſon doublée de* a *à* b, *ou comme* a a *eſt à* b b, *c'eſt-à-dire, que l'on aura* a. c :: a a. b b.

Pour le démontrer, conſiderez que par le Théorême précedent, *a* eſt à *c* en raiſon compoſée des deux raiſons égales de *a* à *b*, & de *b* à *c*, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de *a* à *b* *. Mais les deux termes de toute raiſon doublée ſont entr'eux comme les quarrés des termes des raiſons compoſantes * : Donc *a*. *c* :: *aa*. *bb*. C. q. f. d.

* N°. 641.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

Il ſuit encore de la même propoſition.

648. *Que ſi l'on a de ſuite trois rapports égaux, tels que ceux de* a *à* b ; *de* b *à* c, *& de* c *à* d, *le rapport du premier terme* a *au dernier* d *ſera triplé des termes des raiſons compoſantes, ou que* a. d :: a^3. b^3.

Car par cette propoſition, le rapport de *a* à *d* eſt compoſé des trois rapports égaux propoſés : Or, la raiſon compoſée de trois raiſons égales eſt triplée de ces raiſons * : Donc *a* eſt à *d* en raiſon triplée de *a* à *b* : Mais les termes des raiſons triplées ſont entr'eux comme les cubes des termes des raiſons compoſantes * : Donc *a* eſt à *d*, comme le cube de *a* eſt au cube de *b* : Or, ces cubes ſont a^3 & b^3 * : Donc *a*. *d* :: a^3. b^3. C. q. f. d.

* N. 636.

* N°. 642.

* N°. 590.

V.

V.

De la Proportion Géometrique.

649. ON appelle *proportion* la comparaiſon de deux rapports égaux.

Ainſi, ſi on ſuppoſe que le rapport de *a* à *b* ſoit égal à celui de *c* à *d*, ces deux rapports feront une proportion qui ſe marquera de cette maniere comme les rapports égaux : *a*. *b* :: *c*. *d*. qui veut dire que la quantité repréſentée par *a*, eſt à celle qui eſt repréſentée par *b*, comme *c* eſt à *d*. De ſorte que ſi *a* eſt le tiers ou le quart de *b*, *c* ſera pareillement le tiers ou le quart de *d*.

650. Comme toute proportion eſt compoſée de deux rapports, & que chaque rapport a deux termes, il s'enſuit qu'une proportion a quatre termes.

651. Le premier & le dernier terme d'une proportion, ſont appellés *les termes extrêmes*, ou ſimplement *les extrêmes* ; & les deux du milieu, les *termes moyens*, ou ſimplement *les moyens*.

Ainſi dans la proportion *a*. *b* :: *c*. *d*. *a* & *d* ſont les extrêmes, & *b* & *c* les moyens.

652. On appelle *grandeurs* ou *quantités proportionnelles* celles qui font une proportion, ou des rapports égaux : Ainſi, *dire que deux quantités ſont proportionnelles à deux autres*, c'eſt dire qu'elles font un rapport égal à celui de ces deux autres quantités, ou qu'elles font toutes enſemble une proportion.

La proportion eſt *diſcrete* ou *continue*.

653. La proportion diſcrete eſt celle qui a ſes quatre termes differens, & la continue eſt celle dans

laquelle le conſequent du premier rapport ſert d'antécedent au ſecond.

Ainſi la proportion $a . b :: c . d$ ou $2 . 3 :: 8 . 12$, eſt diſcrete. Et la proportion $a . b :: b . c$, ou $4 . 6 :: 6 . 9$ eſt continue.

654. La proportion continue s'exprime ordinairement par trois termes, mais le premier eſt précedé de ce ſigne $\div\!\!\div$ qui ſert à indiquer cette proportion : Ainſi $\div\!\!\div a . b . c$. repréſente une proportion continue, qu'on énonce en diſant que a eſt à b, comme b eſt à c. Il en eſt de même de la proportion continue $\div\!\!\div 5 . 15 . 45$.

655. Le terme b ou 15 du milieu d'une proportion continue, ſe nomme *moyen proportionnel*, ou ſimplement *moyen*.

656. Pour examiner ſi quatre quantités ou quatre nombres propoſés ſont proportionnels, ou s'ils font une proportion, il faut conſidérer ſi les deux rapports que font ces quatre nombres, ſont égaux ; s'ils le ſont, c'eſt une marque que ces quantités ou ces nombres ſont proportionnels *.

* N°. 652.

657. Soient par exemple les quatre nombres propoſés, 4, 9, 12, & 27. Pour examiner s'ils ſont proportionnels, ou ſi $4 . 9 :: 12 . 27$, on prendra, comme on l'a enſeigné (N°. 600.) les plus petites aliquotes ſemblables des conſequens 9 & 27, qui ſont 1 & 3 ; & conſidérant enſuite que quatre contient quatre fois 1, qui eſt la neuviéme partie de ſon conſequent 9, comme 12 contient auſſi quatre fois 3, c'eſt-à-dire, quatre fois la neuviéme partie de ſon conſequent 27 ; on en concluera que les antécedens de ces deux rapports contiennent le même nombre d'aliquotes ſemblables de leurs conſequens ; qu'ainſi ils ſont égaux, & les quantités qui les forment, proportionnelles, ou que $4 . 9 :: 12 . 27$.

658. On a déja vû que tout rapport pouvoit être exprimé par la diviſion indiquée de l'antécedent par le conſequent, ou par $\frac{a}{b}$, ſi l'antécedent eſt a & le conſequent b * : Or, lorſque les rapports ſont égaux, les quotiens des antécedens diviſés par les conſequens, ou ce qui eſt la même choſe, les expoſans ſont égaux *. Ces expoſans ſont les quotiens des antécedens, diviſés par les conſequens * : Donc ſi l'on a deux rapports égaux, comme celui de a à b, & de c à d, ils pourront s'exprimer également, ou de cette maniere $a.b::c.d.$ ou par $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

* N°. 593, 594 & 595.
* N°. 599.
* N°. 593.

659. La proportion de $a.b::c.d.$ étant exprimée ainſi, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſi on ſuppoſe que $\frac{a}{b}=q$; on aura $bq=a$ *; & l'on aura auſſi, à cauſe de l'égalité des deux rapports de a à b, & de c à d, $\frac{c}{d}=q$, & $c=dq$: Or, mettant dans cette proportion bq à la place de a, & dq à la place de c, on n'y changera aucune choſe, & elle ſera alors exprimée par $bq.b::dq.d.$

* N°. 592.

On ſe ſervira de cette transformation ou de ce changement pour démontrer les proprietés de la proportion; c'eſt-à-dire, qu'appellant toujours q l'expoſant des rapports égaux, on ſubſtituera à la place de l'antécedent de chaque rapport, le produit du conſequent par l'expoſant, qui eſt égal à l'antécedent *.

* N°. 590.

THEOREME VII.

660. *Dans toute proportion géometrique, le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.*

Soit la proportion $a.b::c.d.$ dont a & d ſont

les extrêmes, & b & c les moyens, il faut démontrer que le produit des extrêmes, qui eſt ad, eſt égal à celui des moyens qui eſt bc, ou que $ad = bc$.

DEMONSTRATION.

On vient de voir que l'antécedent a de tout rapport eſt égal au produit de ſon conſequent b, par l'expoſant q, c'eſt-à-dire, que $a = bq$, comme $c = dq$. C'eſt pourquoi mettant à la place de a dans cette proportion, bq, & à la place de c, dq, on aura $bq . b :: dq . d$. dans laquelle le produit des extrêmes eſt bqd, & celui des moyens bdq., qui ſont évidemment des produits égaux, étant formés de la multiplication du même nombre de quantités égales : Donc $bqd = bdq$. Préſentement ſi on ôte de chaque expreſſion de part & d'autre du ſigne d'égalité ; ſçavoir, de celle qui eſt à droite, bq, & qu'on y mette a à la place ; de même que de celle qui eſt à gauche, on ôte dq, & qu'on y ſubſtitue également c, qui lui eſt égal ; on ne changera rien à l'égalité de ces deux produits ; mais l'on aura alors $ad = bc$: Donc puiſque ad eſt le produit des extrêmes de la proportion, & bc celui des moyens, le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens. C. q. f. d.

Si $a = 12$, $b = 4$, $c = 15$, & $d = 5$, on aura $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3 = q$ & $\frac{c}{d} = \frac{15}{5} = 3. = q$ D'où l'on aura $4 \times 3 = 12$. & $5 \times 3 = 15$. Alors la proportion $a . b :: c . d$ deviendra $12 . 4 :: 15 . 5$. qui ſera changée (en ſubſtituant à la place des antécedens le produit de l'expoſant des deux rapports par le conſequent) en celle-ci $4 \times 3 . 4 :: 5 \times 3 . 5$. qui donnera pour le produit des extrêmes $4 \times 3 \times 5 = 4 \times 5 \times 3$. Ce qui eſt évident.

REMARQUES.

I.

661. Comme les lettres a, b, c, & d peuvent repréſenter toutes ſortes de grandeurs, les deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ peuvent repréſenter toutes ſortes de rapports; c'eſt pourquoi la démonſtration qu'on vient de donner de l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens, convient généralement à toutes les grandeurs proportionnelles, ſoit que ces grandeurs ſoient des nombres, des lignes, &c.

Cette même verité peut encore ſe démontrer en nombres de cette maniere.

Soit la proportion 3 . 4 :: 9 . 12.

Il eſt évident que le produit de 3 par 12, qui eſt 36, eſt égal à celui de 4 par 9, qui eſt également 36 : Mais cette preuve n'eſt pas générale; il faut démontrer qu'il en doit être de même dans tous les nombres qui ſont en proportion.

Les deux rapports qui forment la proportion étant toujours égaux*, les antécedens contiendront le même nombre d'aliquotes ſemblables de leurs conſequens*. Si on prend les plus petites de ces aliquotes, qui ſont 1 & 3, l'antécedent 3 du premier rapport, contiendra autant de fois 1, que l'antécedent 9 du ſecond contiendra de fois 3. Exprimant après cela la proportion par le moyen de ſes aliquotes, l'on aura trois fois 1 (qui eſt le nombre d'aliquotes que l'antécedent 3 contient de ſon conſequent 4) eſt à quatre fois 1, c'eſt-à-dire à 4, comme trois fois 3, (qui eſt le nombre d'aliquotes que le ſecond antécedent contient de ſon conſequent) eſt à quatre fois 3, c'eſt-à-dire, au ſecond conſequent 12. Si l'on exprime ce

* N°. 649.
* N°. 599.

terme *fois*, par une virgule; on aura 3, 1. 4, 1 :: 3, 3, 4, 3. Or, on voit par cette transformation que les nombres qu'il faut multiplier pour avoir le produit des extrêmes, & qu'on peut appeller leurs *produisans*, sont 3, 1, 4 & 3. & que les produisans des moyens, sont les mêmes nombres 4, 1, 3 & 3. qui par consequent étant multipliés ensemble donneront les mêmes produits : Donc, &c.

Il faut observer que cette proposition est une des plus importantes de la Géometrie, & qu'on ne sçauroit trop s'appliquer à la concevoir parfaitement, & à se la rendre familiere.

II.

662. Il faut observer aussi qu'on dit ordinairement que les termes extrêmes d'une proportion sont *réciproques des moyens*: Ce qui signifie simplement que leur produit est égal à celui des moyens. Et qu'on dit également que deux quantités sont réciproques à deux autres, pour exprimer que leur produit est égal à celui de ces deux dernieres quantités, ou bien que les deux premieres sont les extrêmes d'une proportion, dont les deux autres sont les moyens.

III.

663. Qu'on dit encore que deux quantités sont en raison *inverse* de deux autres, lorsque la premiere est à la seconde, comme la quatriéme est à la troisiéme : Ensorte, que si l'on a les quatre quantités 12, 4, 5 & 15, dans lesquelles 12 est triple de 4, comme la quatriéme 15 est triple de la troisiéme 5, on dira que 12 est à 4, en raison inverse de 5 à 15; ce qui est la même chose, que de dire comme 15 est à 5. Il y a des Auteurs qui expriment cette même chose, en disant que les deux premieres quantités sont en

raiſon *réciproque* des deux autres. Ainſi le terme de réciproque, dans ce cas, ne veut dire autre choſe que ce qu'on exprime par celui d'inverſe; c'eſt-à-dire, que les deux premieres quantités ſont entr'elles comme le conſequent du ſecond rapport eſt à ſon antécedent, ou comme la quatriéme eſt à la troiſiéme.

THEOREME VIII.

664. Dans toute proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen.

Cette propoſition peut être regardée comme un Corollaire de la précedente. Car ſoit la proportion continue $\dddot{:}$ *a. b. c.* ſi on l'exprime comme la proportion diſcrete, on aura *a. b* :: *b. c.* On vient de voir que *a c* produit des extrêmes eſt égal à *b b* qui eſt à celui des moyens, c'eſt-à-dire, que $ac = bb$. Or, *b b* eſt le quarré du terme moyen *b*, & *a c* le produit des extrêmes : Donc, &c.

THEOREME IX.

665. Si l'on a quatre grandeurs diſpoſées de maniere que le produit de la premiere par la quatriéme ſoit égal à celui de la ſeconde par la troïſiéme, ces quatre grandeurs ſont proportionnelles.

Soient les quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, & *d*. On ſuppoſe que $ad = bc$. Il faut démontrer que de cette ſuppoſition il s'enſuit que *a. b* :: *c. d.* ou ce qui eſt la même choſe, que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Cette propoſition eſt la converſe de la précedente.

DEMONSTRATION.

Soient diviſés les deux produits égaux *a d* & *b c* par

la même quantité bd, les quotiens indiqués qui en réſulteront ſeront égaux. Car des choſes égales, diviſées par des grandeurs auſſi égales, donnent évidemment des quotiens égaux. Ainſi l'on aura $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$. Diviſant après cela les termes du rapport, $\frac{ad}{bd}$, par la même quantité d, c'eſt-à-dire, ôtant d de chacun de ſes termes *, on ne changera rien à la valeur du rapport *, & il ſera alors réduit à $\frac{a}{b}$. Diviſant de même les deux termes du rapport de $\frac{bc}{bd}$ par la même quantité b, il ſera auſſi réduit à celui de $\frac{c}{d}$, qui a la même valeur : Ainſi l'expreſſion $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ ſera réduite à $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui ſignifie que $a.\ b :: c.\ d$ *. C. q. f. d.

* N°. 582.

* N°. 624.

* N°. 658.

COROLLAIRE.

666. Il ſuit de cette propoſition, que lorſqu'on aura quatre quantités, dont le produit des extrêmes ſera égal à celui des moyens, ces quantités ſeront proportionnelles; c'eſt pourquoi on aura démontré que quatre quantités ſont proportionnelles, lorſqu'on aura démontré l'égalité du produit des extrêmes de ces quantités, à celui des moyens.

THEOREME X.

667. *Deux rapports quelconques ſont entr'eux comme le produit des termes extrêmes eſt à celui des moyens.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux rapports de a à b & de c à d. Le produit des extrêmes ſera ad, & celui des moyens bc. Diviſant chacun de ces produits par la même quantité bd, on ne changera rien à leur rapport *, c'eſt-à-dire, qu'on aura $ad.bc :: \frac{ad}{bd} \cdot \frac{bc}{bd}$: Mais les deux derniers rapports de cette proportion ſe réduiſent à $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ (en diviſant chaque terme de $\frac{ad}{bd}$ par d, & de même chaque terme de $\frac{bc}{bd}$ par b, ce qui n'en change pas la valeur) : Donc $\frac{ad}{bd} \cdot \frac{bc}{bd} :: \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$: Donc puiſque les deux rapports de ad à bc & de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$ ſont égaux au même rapport de $\frac{ad}{bd}$ à $\frac{bc}{cd}$, ils ſont égaux entr'eux, c'eſt-à-dire, que $ad.bc :: \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. C. q. f. d.

* N°. 624.

COROLLAIRE.

668. Il ſuit de cette propoſition, que ſi l'on a deux rapports, dont le produit des extrêmes ſoit égal à celui des moyens, les deux rapports ſont égaux; & que ſi ces produits ſont inégaux, les rapports le ſont auſſi, & dans la même raiſon.

PROBLEMES.

I.

669. *Trouver une quatriéme proportionnelle à trois grandeurs données* a, b, & c.

Une quatriéme proportionnelle eſt le quatriéme terme d'une proportion diſcrete, ou ſimplement d'une proportion. Soit appellé x ce quatriéme terme, l'on aura $a . b :: c . x$. & $ax = bc$*. Si l'on diviſe chacun de ces produits par la même quantité a, qui multiplie le premier ax, on aura x* pour le quotient du premier, & $\frac{bc}{a}$ pour le quotient indiqué du ſecond. Mais ax & bc étant des produits égaux, les quotiens de ces produits diviſés par la même quantité a, ſeront égaux : Donc $x = \frac{bc}{a}$: Or bc eſt le produit de la ſeconde & de la troiſiéme des quantités données, a eſt la premiere : Donc la quatriéme proportionnelle aux trois grandeurs données, eſt égale au produit de la ſeconde & de la troiſiéme, diviſé par la premiere.

*N°. 660.

*N°. 582.

Si on ſuppoſe que $a = 6$, $b = 8$, & $c = 15$, on aura $x = \frac{8 \times 15}{6} = \frac{120}{6} = 20$. En effet, $6 . 8 :: 15 . 20$.

REMARQUE ou *OBSERVATION*

Sur la démonſtration de la Regle de Trois, ou de proportion.

670. Lorſqu'on a parlé de la Regle de Trois dans le Traité d'Arithmetique N. 264. on a eſſayé de donner une démonſtration de cette Regle, c'eſt-à-dire, d'expliquer le principe de l'opération par laquelle elle ſe réſout; mais la véritable démonſtration eſt celle qui ſe tire de la proprieté de la proportion géometrique; ſçavoir, de ce que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

Car l'objet de la Regle de Trois eſt de trouver un

quatriéme terme proportionnel à trois termes, ou trois nombres donnés : Or, on vient de voir que le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, il s'enſuit, que pour trouver le quatriéme terme de la proportion, il faut diviſer le produit du ſecond & du troiſiéme terme par le premier. Ce quatrimé terme eſt celui qu'on cherche dans la Regle de Trois; il faut donc opérer ainſi pour le trouver. Mais c'eſt ce qui a été preſcrit pour cet effet : Donc cette opération le fait trouver.

Si on ſuppoſe, par exemple, que 35 pieces de canon en batterie ayent conſommé 15700 livres de poudre pendant un certain tems, & qu'on veuille ſçavoir combien 140 pieces de même calibre en conſommeroient dans le même-tems.

Il eſt évident, que comme 35 pieces de canon ſont à 140, ainſi la conſommation des premieres eſt à celle des ſecondes. Appellant x cette derniere conſommation, on aura cette proportion 35 . 140 :: 15700. x : Or, puiſque $35 \times x = 15700 \times 140$. * $x = \frac{15700 \times 140}{35} = 62800$; c'eſt-à-dire, que x ſe trouve en multipliant enſemble les deux derniers termes de la Regle, & diviſant leur produit par le premier ; le tout ainſi qu'il a été établi N. 269. du Traité d'Arithmetique.

* N°. 660.

II.

671. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs données* a *&* c.

Une moyenne proportionnelle eſt le terme du milieu d'une proportion continue : Or, dans cette proportion le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen * : Donc le produit ac eſt égal au

* N°. 664.

quarré du terme cherché : Donc la racine quarrée de ce produit, qu'on indique ainſi $\sqrt{ac}$, eſt égale au moyen demandé.

D'où il ſuit, que pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres donnés, comme 4 & 16. il faut les multiplier enſemble, & extraire la racine quarrée de leur produit 64. Cette racine, qui eſt 8, ſera le moyen proportionnel demandé : En effet 4. 8 :: 8. 16. ou $\div\div$ 4. 8. 16.

REMARQUE.

672. Si le produit ac des extrêmes de la proportion continue, n'eſt pas un quarré parfait, c'eſt-à-dire, s'il n'a pas pour ſa racine un nombre entier, la moyenne proportionnelle exacte ſera impoſſible : Mais on pourra en approcher en ſe ſervant de la méthode expliquée N°. 500.

Si, par exemple, on ſuppoſe que $a = 8$ & $c = 9$, ac ſera égal à 72, & l'on aura $\sqrt{ac} = \sqrt{72}$: Or, cette racine n'eſt pas 8 ; car $8 \times 8 = 64$ plus petit que 72. Elle n'eſt pas non plus 9, puiſque $9 \times 9 = 81$ plus grand que 72 : Elle eſt ainſi entre 8 & 9. On aura la fraction qu'il faudra ajouter à 8 pour approcher autant qu'on le voudra de la racine exacte par la méthode de l'approximation des racines N°. 500.

III.

673. *Trouver une troiſiéme proportionnelle à deux grandeurs données* a *&* b.

Une troiſiéme proportionnelle eſt le troiſiéme terme d'une proportion continue. Dans cette proportion, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme du milieu ou du moyen *. C'eſt pourquoi ſi on appelle x le troiſiéme terme cherché, on aura

* N°. 664.

$ax = bb$. Et diviſant chaque terme par a, on aura les deux quotiens égaux x & $\frac{bb}{a}$; c'eſt-à-dire $x = \frac{bb}{a}$, qui fait voir que x eſt égal au quarré du ſecond terme b, diviſé par le premier a.

Si $a = 2$, & $b = 6$. on aura $x = \frac{bb}{a} = \frac{6 \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$. En effet, 2. 6 :: 6. 18 ou ∴ 2. 6. 18.

Des differentes manieres de changer l'arrangement & les termes d'une proportion, en conſervant toujours une proportion.

674. On peut changer l'arrangement & les termes d'une proportion de quatre manieres, en conſervant toujours une proportion dans ces differens changemens; ſçavoir,

675. 1°. En *renverſant*, c'eſt-à-dire, en mettant les conſequens à la place des antécedens.

676. 2°. En *permutant* ou en *alternant*, c'eſt-à-dire, en comparant les deux antécedens d'une part, & les deux conſequens de l'autre.

677. 3°. En *compoſant* ou en *ajoutant*, c'eſt-à-dire, en comparant la ſomme de l'antécedent & du conſequent de chaque rapport, avec l'antécedent ou le conquent du même rapport.

678. Et 4°. En *diviſant* ou en *retranchant*, c'eſt-à-dire, en comparant la difference de l'antécedent & du conſequent de chaque rapport, avec l'antécedent ou le conſequent du même rapport.

Ce ſont ces quatre changemens qu'il faut démontrer, c'eſt-à-dire, qu'ayant une proportion géometrique quelconque, on peut faire ces changemens en conſervant toujours une proportion avec les differens termes qui en réſultent.

679. Soit pour cela la proportion $a . b :: c . d$. on la changera en celle-ci . $bq . b :: dq . d$ *.

* N. 659.

DEMONSTRATION du premier changement.

680. Ayant $bq . b :: dq . d$. , il faut démontrer qu'on a auſſi renverſant, $b . bq :: d . dq$. Or, c'eſt ce qui eſt évident, parce que les antécedens b & d de cette proportion contiennent la même partie de leurs conſequens bq & dq. Car ſi, par exemple, $q = 3$ $bq = 3b$ & $dq = 3d$: Or, b eſt le tiers de $3b$, comme d eſt le tiers de $3d$: Donc $b . 3b :: d . 3d$ ou $b . bq :: d . dq$. C. q. f. d.

DEMONSTRATION du ſecond changement.

681. Pour le ſecond changement, il faut démontrer que ſi $bq . b :: dq . d$. on a auſſi en permutant ou en raiſon alterne, $bq . dq :: b . d$. & c'eſt ce qui eſt évident; car la grandeur ou l'expoſant q, multipliant les deux termes b & d dans le premier rapport de cette proportion, les produits bq & dq ſont entr'eux comme b eſt à d* : Donc, &c.

* Nº. 624.

DÉMONSTRATION du troiſiément changement.

682. Dans ce changement, il faut démontrer qu'ayant toujours la proportion $bq . b :: dq . d$. on aura également en compoſant, $bq + b . b :: dq + d . d$. Ce qui eſt évident, car comme l'expoſant q eſt de même valeur dans les deux antécedens $bq + b$, & $dq + d$, il s'enſuit, que ces antécedens contiennent également leurs conſequens b & d. & qu'ainſi $bq + b . b :: dq + d . d$ *.

* Nº. 599.

683. On démontrera de même, ſuppoſant toujours la proportion $bq . b :: dq . d$, que $bq + b . bq :: dq + d . dq$, c'eſt-à-dire, que la ſomme de l'antéce-

dent & du conſequent du premier rapport eſt à l'antécedent, comme la ſomme de l'antécedent & du conſequent du ſecond rapport eſt à ſon antécedent.

DEMONSTRATION du quatriéme changement.

684. Suppoſant donc qu'on ait toujours la même proportion $bq.\ b :: dq.\ d$, il faut démontrer que l'on a auſſi en diviſant, $bq - b.\ b :: dq - d.\ d$.

Comme l'expoſant q eſt de même valeur dans chaque antécedent, il s'enſuit, que chaque antécedent $bq - b$ & $dq - d$ contient ſon conſequent b & d autant de fois, moins 1, que q contient d'unités, à cauſe des retranchemens de b & de d; car ſi $q = 3$. $bq = 3b$ & $3b - b = 2b$. & de même $dq = 3d$, & $3d - d = 2d$. Donc chaque antécedent contiendra deux fois ſon conſequent : Or, il en ſera de même, quelque valeur particuliere qu'on ſuppoſe à q : Donc $bq - b.\ b :: dq - d.\ d$.

685. On démontrera de la même maniere que $bq - b.\ bq :: dq - d.\ dq$, c'eſt-à-dire, que l'antécedent du premier rapport, moins ſon conſequent, eſt à l'antécedent, comme l'antécedent du ſecond rapport, moins ſon conſequent, eſt à l'antécedent.

Si l'on ſuppoſe que $a = 9$, $b = 3$, $c = 6$ & $d = 2$. la proportion $a.\ b :: c.\ d.$ ou $bq.\ b :: dq.\ d.$ deviendra $9.\ 3 :: 6.\ 2.$ & $\frac{9}{3} = 3 = q.$ on aura alors, en renverſant ou en mettant les conſequens à la place des antécedens $3.\ 9 :: 2.\ 6.$ Ce qui eſt évident, 3 étant le tiers de 9, comme 2 l'eſt de 6.

En permutant ou en comparant les deux antécedens d'une part, & les deux conſequens d'une autre, on aura $9.\ 6 :: 3.\ 2.$ car 9 contient trois fois la moitié de 6, comme 3 contient trois fois celle de 2.

En composant, ou joignant ensemble l'antécedent & le consequent de chaque rapport pour le comparer au consequent ou à l'antécedent, on aura $9+3.3::6+2.2.$ ou $12.3::8.2.$ Ce qui est évident, 12 étant quadruple de 3, comme 8 l'est de 2.

Enfin, en divisant ou comparant la difference de l'antécedent & du consequent de chaque rapport, avec le consequent ou l'antécedent du même rapport, on aura, supposant toujours la même proportion $9.3::6.2.9-3.3::6-2.2.$ c'est-à-dire, $6.3::4.2.$ Ce qui est évident, puisque 6 est double de 3, comme 4 l'est de 2.

REMARQUE.

685. Il y a encore un cinquiéme changement, qu'on appelle *conversion de raison*, qui consiste, si l'on a $bq.b::dq.d.$, à conclure que le premier antecedent bq, est à sa difference du consequent, qui est $bq-b.$ comme le second antécedent dq, est aussi à sa difference du consequent, laquelle est $dq-d$, c'est-à-dire, que $bq.bq-b::dq.dq-d.$ Ce qui est évident; car les aliquotes semblables des consequens $bq-b$ & $dq-b$ sont b & d qui y sont contenues autant de fois, moins 1, que q contient d'unités: Or, q étant de même valeur dans chaque antécedent bq & dq, il s'ensuit, que ces antécedens contiennent le même nombre d'aliquotes semblables de leurs consequens; & qu'ainsi les deux rapports de bq à $bq-b$, & dq à $dq-d$ sont égaux *: Donc $bq.bq-b::dq.dq-d.$ C. q. f. d.

* N°. 599.

Ce changement étant de peu d'usage, il faut seulement s'appliquer à bien concevoir & retenir les quatre premiers qui sont les seuls qu'on employera dans le cours de cet ouvrage.

THEOREME XI.

THEOREME XI.

686. *Lorſque quatre quantités ſont proportionnelles, ſi les antécedens ſont égaux, les conſequens le ſont auſſi, & ſi les conſequens ſont égaux, les antécedens le ſont également.*

Soit $a.b::c.d.$ & ſoit ſuppoſé $a=c$, il faut démontrer qu'on aura auſſi $b=d$.

DÉMONSTRATION.

Puiſque $a.b::c.d.$ on aura auſſi en raiſon alterne * $a.c::b.d.$ Or, comme ces deux rapports ſont égaux, & que a contient une fois ſon conſequent c, ou qu'il lui eſt égal, b ſera donc auſſi égal à d *: Donc, &c. * N°. 676 * N°. 599.

687. On démontrera de même que ſi $b=d$, on aura $a=c$. Et que ſi a & b ſont égaux, c & d le ſeront auſſi entr'eux.

THEOREME XII.

688. *Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion, les produits ſeront encore en proportion.*

Soient les deux proportions $a.b::c.d$, & $f.g::m.n$. ſi on multiplie chacun des termes de la premiere proportion; ſçavoir, les deux premiers antécedens l'un par l'autre, puis les deux premiers conſequens, &c. l'on aura $af.bg::cm.dn.$

DEMONSTRATION.

Conſiderez que le rapport de af à bg eſt compoſé de deux rapports, qui ſont égaux à ceux qui compoſent celui de cm à dn:

$$\left\{\begin{array}{l} a.b::c.d. \\ f.g::m.n. \\ \hline af.bg::cm.dn. \end{array}\right.$$

Or, les rapports composés de même nombre de rapports égaux, sont égaux * : Donc $af.bg :: cm.dn$. C. q. f. d.

* N°. 640.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition,

689. *Que lorsque quatre quantités sont proportionnelles, leurs quarrés & leurs cubes le sont aussi ; & réciproquement, que lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, leurs racines quarrées & cubiques le sont également.*

Car si l'on considere, pour la premiere partie de la proposition, que les quarrés des termes d'une proportion ne sont autre chose que les termes de la proportion multipliés par eux-mêmes *, il s'ensuivra qu'ils sont encore en proportion *. Multipliant ensuite ces quarrés par leurs racines, qui sont les termes de la premiere proportion, on aura encore une proportion * ; Mais les produits qui en résulteront seront les cubes des termes de la premiere : Donc ces cubes seront aussi en proportion : Donc si l'on a, $a.b :: c.d$, on aura encore $aa.bb :: cc.dd$, & $a^3.b^3 :: c^3.d^3$. C. q. f. d.

* N°. 469.
* N°. 688.
* N°. 688.

690. A l'égard de la seconde partie de la proposition, qui consiste à faire voir que si quatre grandeurs sont proportionnelles, leurs racines quarrées & cubiques le sont également, c'est-à-dire, que si $a.b :: c.d$. on a aussi $\sqrt{a}.\sqrt{b} :: \sqrt{c}.\sqrt{d}$, & $\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c}.\sqrt[3]{b}$.

Il faut observer que les quatre quantités a, b, c & d, étant considerées comme des quarrés & des cubes, elles sont en raison doublée & triplée de leurs racines quarrées & cubiques * : Or, ces raisons doublées

* N°. 638.

& triplées ſont égales entr'elles, par la ſuppoſition que *a*. *b* :: *c*. *d*. : Donc leurs raiſons compoſantes *, c'eſt-à-dire, leurs racines quarrées & cubiques le ſont également : Donc, &c. * N°. 636.

THEOREME XIII.

691. *Quatre quantités étant proportionnelles, le produit des deux antécedens eſt à celui des deux conſequens, comme le quarré d'un antécedent eſt à celui de ſon conſequent.*

Soient les deux rapports égaux de *a* à *b*, & de *c* à *d*, il faut démontrer que *ac*, qui eſt le produit des deux antécedens, eſt à *bd*, qui eſt celui des conſequens, comme *aa* eſt à *bb*.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que le rapport de *ac* à *bd* eſt doublé de celui de *a* à *b* * : Or, les termes des raiſons doublées ſont entr'eux comme les quarrés des termes des raiſons compoſantes * : Donc *ac*. *bd* :: *aa*. *bb*. C. q. f. d. * N°. 636. * N°. 641.

THEOREME XIV.

692. *Si l'on a trois rapports égaux, ou ſix quantités proportionnelles, le produit des trois antécedens eſt à celui des conſequens, comme le cube d'un antécedent eſt à celui de ſon conſequent.*

Soient les trois rapports égaux de *a* à *b*, de *c* à *d*, & de *f* à *g*, il faut démontrer que *acf*, qui eſt le produit des 3 antécedens

a . *b*
c . *d*
f . *g*

acf . *bdg* :: *aaa*. *bbb*.

eſt à $b\,d\,g$, qui eſt celui des conſequens, comme $a\,a\,a$ ou a^3 qui eſt le cube de a, eſt à $b\,b\,b$ ou b^3, qui eſt celui de b.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que $a\,c\,f$ eſt $b\,d\,g$ en raiſon triplée de
*N°. 636. a à b * : Or, les termes des rapports triplés ſont entr'eux comme les cubes des termes des raiſons com-
*N°. 642. poſantes * : Donc $a\,c\,f.\ b\,d\,g :: a^3.\ b^3$. C. q. f. d.

REMARQUE.

693. Il faut s'attacher à retenir parfaitement les deux dernieres propoſitions. On s'en ſervira dans la ſuite pour déterminer le rapport des ſurfaces, & celui des ſolides.

THEOREME XV.

694. *Si l'on a trois quantités en proportion continue, la premiere eſt à la derniere en raiſon doublée de la premiere à la ſeconde, ou comme le quarré de la premiere eſt à celui de la ſeconde.*

Soit la proportion continue $a.\ b :: b.\ c.$ ou $\div\ a.\ b.\ c.$ il faut démontrer que $a.\ c :: a\,a.\ b\,b.$

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les rapports de a à b & de b à c étant de ſuite, & égaux, le premier terme a eſt au dernier c en raiſon doublée de chacun des termes de
*N°. 647. ces rapports *, c'eſt-à-dire, comme $a\,a$ eſt à $b\,b$ * :
*N°. 641. Donc $a.\ c :: a\,a.\ b\,b.$ C. q. f. d.

THEOREME XVI.

695. *Si l'on a une proportion continue de quatre termes, le premier eſt au dernier en raiſon triplée du premier au ſecond, ou comme le cube du premier eſt à celui du ſecond.*

Soit la proportion continue de quatre termes $a.b::b.c::c.d$ ou $\div\!\!\div a.b.c.d$. il faut démontrer que $a.d::a^3.b^3$.

DEMONSTRATION.

Il faut obſerver que cette proportion continue donnant trois rapports de ſuite égaux, le premier terme eſt au dernier en raiſon triplée du premier au ſecond *, ou comme le cube du premier eſt au cube du ſecond * ; Donc $a.d::a^3.b^3$. C. q. f. d.

$$\left.\begin{array}{l} a.b \\ b.c \\ c.d \end{array}\right\} \quad abc.bcd::a.d::a^3.b^3.$$

* N°. 618
* N°. 632.

REMARQUE.

696. Lorſqu'une proportion continue a quatre termes, les deux du milieu ſe nomment chacun *moyennes proportionnelles* : Ainſi dans cette proportion il y a deux moyennes proportionnelles. La premiere eſt celle qui ſuit immédiatement le premier terme, & la ſeconde eſt celle qui précede le dernier. Ainſi dans la proportion continue $\div\!\!\div a.b.c.d$. b eſt la premiere moyenne proportionnelle, & c la ſeconde. Comme ces deux moyennes proportionnelles ont pluſieurs uſages dans la Géometrie des ſolides, on va donner la méthode génerale de les trouver. Elle ſe tire du Théorême précedent.

PROBLEME.

697. *Entre deux grandeurs données* a & b *trouver deux moyennes proportionnelles.*

RESOLUTION.

Il faut ſuppoſer qu'elles ſont trouvées, & nommer

x la premiere, & y la ſeconde, & l'on aura alors $a.x::x.y::y.b$. Mais par le Théorême précedent *. $a.b::a^3.x^3$. Le produit des extrêmes de cette proportion qui eſt à ax^3 étant égal à celui des moyens qui eſt a^3b *, donnera $ax^3 = a^3b$, ou $axxx = aaab$. qui ſe réduit, en diviſant chaque terme par a, c'eſt-à-dire, en ôtant un a de chaque terme, a, $xxx = aab$. Or x eſt la racine cube de xxx *, & comme lorſque deux quantités ſont égales, leurs racines quarrées & cubiques le ſont auſſi, il s'enſuit, que $x = \sqrt[3]{aab}$: expreſſion qui indique,

* N°. 995.

* N°. 660.

* N°. 591.

698. *Que pour avoir* x *ou la premiere moyenne proportionnelle entre deux quantités quelconques* a & b, *il faut quarrer la premiere* a, *pour avoir* a a ; *multiplier ce quarré par la ſeconde quantité donnée* b, *ce qui donne* a a b, *& extraire la racine cube de ce produit.*

699. Si a & b ſont données en nombres, & que le produit aab ne ſe trouve pas un cube parfait, on ne pourra en extraire la racine cube exactement, & par conſéquent on ne pourra avoir que par approximation la premiere des deux moyennes proportionnelles demandées, & cela, en ſe ſervant de la méthode expliquée N. 546.

Soient, par exemple, les deux nombres donnés 6 & 9, entre leſquels il faut trouver deux moyennes proportionnelles. On aura alors pour la valeur de x, ou de la premiere de ces moyennes proportionnelles la racine cube du quarré de 6, qui eſt 36, multiplié par 9, qui donne pour aab le produit 324 : Or, la racine cube de ce produit eſt entre 6 & 7 ; car le cube de 6 eſt 216, nombre plus petit que 324, & celui de 7 eſt 343 plus grand que 324 : Ainſi dans cet exemple, on ne peut avoir x que par approximation.

Si au lieu des deux nombres précedens on a 2 & 54, alors on trouvera exactement deux moyennes proportionnelles entre ces nombres; car le quarré du premier eſt 4, lequel étant multiplié par le ſecond 54 donne 216 pour la valeur de aab: Or, la racine cube de 216 eſt 6: Donc $6 = x = \sqrt[3]{aab}$, c'eſt-à-dire, la premiere des deux moyennes proportionnelles demandées.

700. La premiere moyenne proportionnelle étant connue; il eſt aiſé d'avoir la ſeconde, qui eſt moyenne proportionnelle entre la premiere & le ſecond nombre donné; car cette premiere étant x, l'autre y, & le ſecond nombre donné b, on a $x.y::y.b.$ ce qui donne $bx = yy$, d'où l'on aura la valeur de y, comme on l'a enſeigné N. 671.

VI.

De la Progreſſion géometrique.

701. ON appelle *progreſſion* une ſuite de rapports égaux, dans leſquels le conſequent du premier rapport ſert d'antécedent au ſecond, & le conſequent de celui-ci, d'antécedent au troiſiéme, & ainſi de ſuite.

702. La progreſſion ſe marque avec le même ſigne qui précede la proportion continue $\div\!\!\div a.b.c.d.f.$ &c. qui s'exprime, en diſant que a eſt à b, comme b eſt à c, comme c eſt à d, & comme d eſt à f, &c. De même $\div\!\!\div$ 2. 6. 18. 54, &c. s'exprime en diſant que 2 eſt à 6, comme 6 eſt à 18, &c.

REMARQUE.

Si les Commençans trouvent de la difficulté à concevoir ce qui eſt expliqué dans les nombres ſuivans 703, 704, 705, 706 & 707, ils pourront le paſſer ; de même que le troiſiéme Problême qui eſt à la fin de cet article N. 721, lequel problême n'eſt qu'une application de ce qui eſt expliqué dans les articles des nombres ci-deſſus.

703. Si on ſuppoſe que la progreſſion ſoit *multiple*, ou que ſes termes aillent en augmentant, & que l'expoſant de chaque rapport renverſé ſoit q, elle pourra être exprimée par cette expreſſion génerale, qu'on appelle *formule*. $\div\!\!\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5$, &c.

Pour le démontrer, conſiderez que $\frac{b}{a}$ étant par la ſuppoſition, égal à q, on a $\frac{b}{a} = q$ & $b = aq$ * ; & comme tous les rapports de la progreſſion ſont égaux, ils le ſeront encore en renverſant * ; c'eſt-à-dire, qu'on aura auſſi $\frac{c}{b} = q$ & $c = bq$. mettant dans bq, aq à la place de b, on aura $c = aqq$ ou aq^2. Ayant également $\frac{d}{c} = q$ on a $d = cq$, & mettant dans cette expreſſion aqq à la place de c, on aura $d = aqqq = aq^3$. Il eſt aiſé de déterminer de la même maniere tous les autres termes de la progreſſion $\div\!\!\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ f.$ &c. Donc elle peut être exprimée par $\div\!\!\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5$, &c.

* N°. 696.

* N°. 680.

Si $a = 2$ & $b = 6$, on aura $\frac{b}{a}\ \frac{6}{2} = 3 =$ q. Alors $aq = 2\times3 = 6$. $aq^2 = 2\times3\times3 = 18$.

$aq^3 = 2\times3\times3\times3 = 54$. $aq^4 = 2\times3\times3\times3\times3 = 162$, &c. C'eſt pourquoi dans ce cas la progreſſion repréſentée par la formule $\div\div a . aq . aq^3$. &c. ſera $\div\div 6 . 18 . 54 . 162 . 486$, &c.

704. Si la progreſſion eſt *ſous-multiple*, c'eſt-à-dire, ſi ſes termes vont en diminuant, comme $\div\div 9 . 3 . 1 . \frac{1}{3} . \frac{1}{9} . \frac{1}{27}$, &c. la formule précedente deviendra $\div\div bq . b . \frac{b}{q} . \frac{b}{q^2} . \frac{b}{q^3} . \frac{b}{q^4} \frac{b}{q^5}$. &c.

Pour le démontrer, ſoit ſuppoſé $\frac{a}{b} = q$, on aura $a = bq$*. On aura auſſi, à cauſe de l'égalité des rapports de la progreſſion $\frac{b}{c} = q$, * d'où l'on tire $b = cq$. Diviſant à préſent chacune de ces quantités égales par la même q on aura $\frac{b}{q} = c$. La même progreſſion donnera encore $\frac{c}{d} = q$. & $c = dq = \frac{b}{q}$. Diviſant les deux quantités égales dq & $\frac{b}{q}$ par la même q les quotiens ſeront égaux, c'eſt-à-dire, qu'on aura $d = \frac{b}{qq}$ ou $d = \frac{b}{q^2}$. On déterminera par la même méthode tous les autres termes de la progreſſion ſous-multiple $\div\div a . b . c . d$, &c. Donc elle peut être repréſentée par $\div\div bq . b . \frac{b}{q} . \frac{b}{q^2}$, &c.

* N°. 596.

* N°. 569.

Si on ſuppoſe que $a = 8$, & $b = 4$, on aura $\frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2 = q$. $bq = 4\times2 = 8$. $\frac{b}{q} = \frac{4}{2} = 2$. $\frac{b}{q^2} = \frac{4}{2\times2} = \frac{4}{4} = 1$. $\frac{b}{q^3} = \frac{4}{2\times2\times2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (en diviſant chaque terme par 4, ce qui

ne change rien à la valeur de l'expreſſion $\frac{4}{8}$ *) $\frac{b}{q^4} = \frac{4}{2\times2\times2\times2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, &c. Enſorte, que la progreſſion ſous-multiple repréſentée par la formule $\div\div bq.\ b.\ \frac{b}{q}$ &c. devient dans cette ſuppoſition $\div\div 8.\ 4.\ 2.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}$, &c.

* N. 624.

REMARQUE.

705. Les expreſſions générales qu'on vient de donner de la progreſſion multiple & de la ſous-multiple ſervent à faire trouver tel terme qu'on veut de ces progreſſions, lorſque le premier & le ſecond terme ſont connus. Car alors on connoît l'expoſant du rapport renverſé qui regne dans la progreſſion multiple, & celui du rapport direct de la ſous-multiple : Or, dans la premiere, la formule fait voir

706. *Que chaque terme eſt égal au premier multiplié autant de fois par l'expoſant du rapport renverſé, qu'il y a de termes qui le précedent.*

Par exemple, le quatriéme terme de cette progreſſion aq^3, eſt $a\times q\times q\times q$, c'eſt-à-dire, que a eſt multiplié trois fois par l'expoſant q, ou autant de fois qu'il y a de termes qui précedent le quatriéme. Le huitiéme aq^7, n'eſt de même que le premier a multiplié ſept fois par q, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il y a de termes qui précedent le 8, &c.

Dans la progreſſion ſous-multiple, la formule $\div\div bq.\ b.\ \frac{b}{q}.\frac{b}{q^2}.\frac{b}{q^3}$, &c. fait voir

707. *Que chaque terme qui eſt à la ſuite du ſecond, n'eſt que le ſecond diviſé par l'unité, multipliée autant de fois par l'expoſant* q, *qu'il y a de termes, moins un, qui le précedent.*

Car le troiſiéme terme $\frac{b}{q}$ de cette formule eſt b diviſé par $q = 1 \times q$, ou 1 multiplié 2 fois moins 1 par q, c'eſt-à-dire, une fois qui eſt le nombre des termes, moins 1, qui précedent le troiſiéme : Donc, &c. Ainſi le centiéme terme de cette progreſſion ſera $\frac{b}{q^{98}}$. Car il y a 99 termes qui précedent le centiéme, deſquels 99. ôtant 1, reſte 98. Ainſi le centiéme eſt le ſecond b diviſé par l'unité, multipliée 98 fois par l'expoſant q. Il en ſera de même de tous les autres termes qu'on voudra trouver de cette progreſſion.

THEOREME I.

703. *Dans toute progreſſion géometrique, le produit de deux termes également éloignés des extrêmes eſt égal à celui des extrêmes.*

Soit, par exemple, la progreſſion ∴ 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Il faut démontrer que le produit de 4 par 64, termes également éloignés des extrêmes de la progreſſion 2 & 128, eſt égal à celui de ces extrêmes, ou que $4 \times 64 = 256$ eſt égal à 2×128; ce qui eſt évident, puiſque ce dernier produit eſt auſſi égal à 256.

Mais pour le démontrer géneralement, il faut conſidérer que tous les rapports qui compoſent la progreſſion ſont égaux entr'eux *, & qu'ainſi 2. 4 :: 64. 128. Or, dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens *: Donc $2 \times 128 = 4 \times 64$. C. q. f. d.

* Nº. 701.

* Nº. 660.

THEOREME II.

709. *Dans toute progreſſion géometrique qui diminue, le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond,*

comme le premier moins le dernier, eſt à la ſomme de tous les termes moins le premier.

Soit la progreſſion quelconque ∴ *a . b . c . d . f.* qui va en diminuant, il faut démontrer que le premier terme *a* moins le ſecond *b*, eſt à *b*, comme le premier *a* moins le dernier *f*, eſt à la ſomme de tous les termes, moins *a*.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que tous les rapports de la progreſſion étant égaux, la ſomme de tous les antécedens ſera à celle des conſequens, comme un ſeul antécedent eſt
* N°. 628. à ſon conſequent *, c'eſt-à-dire, que $a . b :: a+b+$
* N°. 634. $c+d . b+c+d+f$. Ce qui donne en diviſant * $a-b . b :: a+b+c+d-b-c-d-f . b+c+d+f$. & comme $+b-b=o$ de même que $+c-c$, $+d-d$, effaçant du troiſiéme terme de cette proportion toutes ces quantités qui ſe détruiſent, elle deviendra alors $a-b . b :: a-f . b+c+d+f$. Or $a-b$ eſt le premier terme moins le ſecond, $a-f$ eſt le premier moins le dernier *f*, & $b+c+d+f$ eſt eſt la ſomme de tous les termes de la progreſſion, moins le premier : Donç, &c.

$$\begin{array}{r} a . b \\ b . c \\ c . d \\ d . f \\ \hline a . b :: a+b+c+d . b+c+d+f \end{array}$$

PREMIER COROLLAIRE.

710. Si on ſuppoſe que la progreſſion ſous-multi-

ple ait une infinité de termes, le dernier pourra être regardé comme zero, & alors, *le premier terme moins le second ſera au ſecond, comme le premier ſera à la ſomme de tous les autres termes de la progreſſion.*

Car dans cette ſuppoſition, f étant $= 0$, la proportion précedente deviendra $a - b . b :: a . b + c + d + f$. Donc, &c.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

711. Si la raiſon double regne dans la progreſſion, c'eſt-à-dire, ſi l'antécedent eſt double de ſon conſequent, ou ſi $a = 2b$, *le premier terme moins le dernier ſera égal à la ſomme de tous les termes moins le premier.*

Car alors la proportion $a - b . b :: a - f . b + c + d + f$, deviendra $2b - b . b :: a - f$. &c. Or $2b - b = b$: Donc dans ce cas, les deux termes du rapport de $a - b$. à b. étant égaux, les deux termes du rapport de $a - f$ à $b + c + d + f$ le ſeront auſſi, ces deux rapports étant égaux *: Donc $a - f$ égalera $b + c + d + f$, c'eſt-à-dire, la ſomme de tous les termes de la progreſſion, moins le premier. * N°. 599.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

712. *Si la raiſon double regne dans une progreſſion compoſée d'une infinité de termes, le premier ſera égal à la ſomme de tous les autres termes.*

Car alors le premier, moins le dernier, qu'on peut conſidérer comme zero, n'étant autre choſe que le premier, il s'enſuit, que le premier ſera égal à la ſomme de tous les autres termes à l'infini qui compoſent la progreſſion *. * N°. 741.

Ainſi, ſi cette progreſſion eſt $\therefore 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$, &c. le premier terme 1 ſera égal à la ſomme de

toutes les fractions à l'infini qui compoſent tous les autres termes de la progreſſion.

QUATRIE'ME COROLLAIRE.

713. Si la raiſon decuple regne dans la progreſſion, c'eſt-à-dire, ſi $a = 10b$ le premier, moins le dernier, ſera neuf fois plus grand que la ſomme de tous les autres termes.

Car alors on aura $10b - b . b :: a - f . b + c + d$, &c. Or $10b - b = 9b$; ce qui fait voir que le premier terme du rapport de $10b - b$ à b étant 9 fois plus grand que ſon conſequent b, le premier a, moins le dernier f, ſera auſſi neuf fois plus grand que les autres termes de la progreſſion. Et ſi la progreſſion eſt infinie, il ſera ſans retranchement neuf fois plus grand que tous les autres termes. Ce qui eſt évident, après ce qu'on a dit dans le Corollaire précedent.

REMARQUE.

714. On a ſuppoſé dans le précedent Théorême que la progreſſion alloit en diminuant, ou qu'elle étoit ſous-multiple; mais on peut l'appliquer également à la multiple en la retournant, c'eſt-à-dire, en prenant le dernier terme pour le premier. Par exemple, la progreſſion $\dddot{\div} \frac{1}{9} . \frac{1}{3} . 1 . 3 . 9.$ peut être changée dans cette progreſſion ſous-multiple $\dddot{\div} 9 . 3 . 1 . \frac{1}{3} . \frac{1}{9}$, en prenant ſon premier terme $\frac{1}{9}$ pour le dernier, & ſon dernier 9 pour le premier. Mais on peut éviter ce changement par le Théorême précedent, énoncé de cette maniere.

THEOREME III.

715. *Dans toute progreſſion géometrique qui va en augmentant, le ſecond terme moins le premier eſt au*

premier, comme le dernier moins le premier eſt à la ſomme de tous les termes moins le dernier.

Soit la progreſſion ∴ $a . b . c . d . f$. qui va en augmentant, l'on aura, comme dans le Théorême précedent $a . b :: a+b+c+d . b+c+d+f$. D'où l'on aura, en renverſant *, $b . a :: b+c+d+f . a+b+c+d$. Et en diviſant * $b-a . a :: b+c+d+f-a-b-c-d . a+b+c+d$. effaçant ce qui ſe détruit dans le troiſiéme terme de cette proportion, il ſe réduit à $f-a$. Ainſi la proportion devient $b-a . a :: f-a . a+b+c+d$. qui fait voir que le ſecond terme b moins le premier a, eſt à a comme le dernier f, moins le premier a eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier. C. q. f. d.

* N°. 68e.
* N°. 634.

COROLLAIRE.

716. *Si le rapport ſous-double regne dans la progreſſion, c'eſt-à-dire, ſi chaque antécedent n'eſt que la moitié de ſon conſequent, le dernier terme moins le premier ſera égal à la ſomme de tous les autres termes qui le précedent.*

Car dans ce rapport l'on aura $b=2a$, & comme $2a-a=a$, il s'enſuit, que dans la proportion $b-a . a :: f-a . a+b+c$, &c. on aura le premier terme du premier rapport $b-a=a$, & par conſequent égal au ſecond terme a: Donc le dernier f, moins le premier a, ſera auſſi égal à tous les termes de la progreſſion moins le dernier.

517. Si le premier terme eſt ſi petit qu'il puiſſe être conſideré comme zero, ſuppoſant toujours le rapport ſous-double dans la progreſſion, le dernier terme ſera égal à la ſomme de tous les autres termes qui le précedent. Ce qui eſt évident.

718. Il eſt aiſé de tirer de la proportion $b-a .$

$a :: f - a . a + b + c$, &c. tous les autres Corollaires qui ont été déduits du Théorême du nombre 709.

PROBLEMES.

I.

719. *Le premier & le ſecond terme d'une progreſſion géometrique qui diminue, étant donnés avec le dernier terme, trouver la ſomme de tous les termes de la progreſſion.*

Soit le premier terme donné 81, le ſecond 27, & le dernier 1. On aura * $81 - 27 . 27 :: 81 - 1 . x$ (appellant x la ſomme de tous les termes moins le premier) ou en effaçant ce qui ſe détruit $54 . 27 :: 80 . x$

* N°. 709.

* N°. 669. $= \frac{27 \times 80}{54} =$ * 40.

Ce nombre 40 étant la ſomme de tous les termes de la progreſſion, moins le premier 81, il s'enſuit, qu'en lui ajoutant 81, on aura la ſomme de tous les termes de la progreſſion qui eſt $40 + 81 = 121$.

II.

720. *On ſuppoſe qu'*ACHILLES *va dix fois plus vîte qu'une Tortue, & qu'elle a une lieue d'avance, on demande quel ſera le chemin qu'Achilles parcourra pour l'attraper.*

Ce problême ſe réduit à trouver le chemin que fait la tortue, qui n'eſt autre choſe que la ſomme des termes d'une progreſſion infinie, ou dont le dernier terme eſt zero, le premier 1, & le ſecond $\frac{1}{10}$, c'eſt-à-dire, dans laquelle regne la raiſon décuple.

Le chemin de la Tortue peut donc être exprimé par cette progreſſion $\dot{\dot{.}}\ 1 . \frac{1}{10} . \frac{1}{100} . \frac{1}{1000}$, &c. comme 1 eſt égal à $\frac{10}{10}$, on peut ſubſtituer $\frac{10}{10}$ à l'unité,

qui

qui eſt le premier terme, & la progreſſion ſera $\frac{10}{10} : \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000}$, &c. Or, dans cette progreſſion le premier terme 1 ou $\frac{10}{10}$ moins le dernier, qui eſt zero, eſt neuf fois plus grand que la ſomme de tous les termes, moins le premier * : Donc en diviſant 1 par 9 la fraction $\frac{1}{9}$ ſera la ſomme de tous les termes de la progreſſion, moins le premier, c'eſt-à-dire, de toutes les fractions à l'infini $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, &c. Ainſi ajoutant le premier terme 1 à $\frac{1}{9}$, on aura $1 + \frac{1}{9}$ pour le chemin que parcourra la Tortue. Ce qui fait voir qu'Achilles l'attrapera à la fin de la neuviéme partie de la ſeconde lieue.

* N°. 713.

III.

721. *On ſuppoſe que des Sapeurs font une ſape dans un endroit fort dangereux ; & qu'on eſt convenu de leur payer 2 ſols pour la premiere toiſe, 4 ſols pour la ſeconde, 8 ſols pour la troiſiéme, & ainſi de ſuite dans la raiſon ſous-double, & qu'ils ont fait 25 toiſes de cette ſape ; ſçavoir ce qu'il faut leur payer.*

Il eſt évident que le gain de ces Sapeurs forme une progreſſion géometrique qui va en augmentant, & que la ſomme des termes de cette progreſſion donnera le gain demandé.

Pour avoir cette ſomme, il faut connoître le dernier terme de la progreſſion, qui dans cet exemple eſt le 25e : Or, ſuivant ce qu'on a vû N. 703 & 706, il faut pour avoir le 25 terme de cette progreſſion, multiplier le premier 2, 24 fois par l'expoſant 2 du rapport renverſé de la proportion ; car $\frac{4}{2} = 2$. Faiſant donc cette multiplication, on aura pour ce vingt-cinquiéme terme 33554432 ſols.

Préſentement, comme la raiſon qui regne dans cette progreſſion eſt ſous-double, le dernier terme

moins le premier ſera égal à la ſomme de tous les termes qui le précedent *, c'eſt-à-dire, que 33554432 —2 ou 33554430, eſt la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier 33554432. Ajoutant à cette ſomme ce dernier terme, on aura 67108862 ſols pour la ſomme de tous les termes de la progreſſion, laquelle ſomme vaut 33554443 tt + 2 ſols, ſomme exhorbitante pour l'ouvrage dont il s'agit, & qui fait que le prix de la toiſe, quoique modique en apparence, eſt infiniment au-deſſus de ce qu'il doit être naturellement.

* N°. 716.

33554430
33554432
67108862 ſols.
33554443 tt 2 ſ.

REMARQUE.

722. On a propoſé cet exemple pour donner une idée de l'augmentation que produiſent les progreſſions. Si on avoit ſuppoſé 30 ou 40 termes dans celle qu'on vient de calculer, la ſomme en ſeroit devenue beaucoup plus conſidérable ; car le 26e terme auroit contenu le double du 25e, & le 27e le double du 26e, ou le quadruple du 25e, c'eſt-à-dire, que la 27e toiſe auroit couté 67108864 tt + 8 ſols. On ſent par-là la prodigieuſe augmentation de la ſomme des autres termes de cette progreſſion.

VII.

Du Rapport & de la Proportion Arithmetique.

723. ON a déja dit que le rapport arithmetique eſt celui dans lequel on conſidere la différence de l'antécedent & du conſequent : Ainſi le rapport arithmetique de 7 à 5 eſt 2, & en géneral celui de *a* à *b* eſt *a*——*b* ou *b*——*a*.

724. Les rapports arithmetiques ſont égaux, lorſque les antécedens different également de leurs conſequens.

Le rapport arithmetique de 11 à 15 eſt, par cette définition, égal à celui de 5 à 9, parce que 11 differe de 15 de quatre unités, comme 5 differe également de 9.

725. Comme deux rapports géometriques égaux, font la proportion géometrique, de même deux rapport arithmetiques égaux font la proportion arithmetique : Ainſi les quantités 11 & 15, 5 & 9 font une proportion arithmetique.

726. La proportion arithmetique ſe marque de cette maniere 11 . 15 : 5 . 9. qui veut dire que 11 differe de 15, comme 5 differe de 9. Les deux points du milieu ſervent à diſtinguer cette proportion de la géometrique qui en a quatre.

727. Le premier & le dernier terme de la proportion arithmetique ſe nomment, comme dans la Géométrique, les *extrêmes*; & les deux du milieu, les *moyens*.

728. Si le conſequent du premier rapport d'une

proportion arithmetique ſert d'antécedent au ſecond, elle ſe nomme *proportion continue :* Ainſi 5 . 7 : 7 . 9 eſt une proportion continue arithmetique. Elle ſe marque ordinairement de cette maniere ÷ 5 . 7 . 9 .

729. Le terme 7 du milieu d'une proportion continue arithmetique ſe nomme *moyen* ou *moyenne arithmetique.* Le premier terme differe autant de la moyenne arithmetique, qu'elle differe du troiſiéme.

730 Si l'on ſuppoſe que les quatre quantités a, b, c, d ſoient en proportion arithmetique, ou que $a . b : c . d .$, & que b ſoit plus grand ou plus petit que a de la quantité e, on aura $a + e = b$ dans le premier cas, & $a - e = b$ dans le ſecond; enſorte que $a \pm e = b$ renferme les deux cas; de même que $c \pm e = d$. C'eſt pourquoi ſi à la place de b & à celle de c, on ſubſtitue leurs valeurs $a \pm e$, $c \pm e$, la proportion $a . b : c . d.$ ſera transformée en celle-ci. $a . a + e : c . c + e .$ ou $a . a - e : c . c - e$. C'eſt la forme qu'on donnera à la proportion arithmetique pour la démonſtration des propoſitions ſuivantes.

THEOREME I.

731. *Dans toute proportion arithmetique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens.*

Soit la proportion arithmetique quelconque $a . b : c . d$; il faut démontrer que $a + d = b + c$.

DEMONSTRATION.

Suppoſant que la difference des termes de chaque rapport ſoit e, & que le conſequent ſoit plus grand que l'antécedent, on aura $a + e = b$*, & de même $c + e = d$. Et mettant dans la proportion, ces deux valeurs de b & de d à la place de b & d, elle devien-

* N°. 730.

dra $a.a+e:c.c+e$. Alors la ſomme des extrêmes eſt $a+c+e$ = celle des moyens $a+e+c$. Donc, &c.

Si a eſt plus grand que b, & c plus grand que d, on aura $a-c=b$, & $c-e=d$ *, & la proportion ſera $a.a-e::c.c-e$ dont la ſomme des extrêmes $a+c-e$ eſt auſſi évidemment égale à celle des moyens $a-e+c$. Donc, &c. * N°. 730.

THEOREME II.

732. *Dans la proportion continue arithmetique, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen.*

Cette propoſition n'eſt qu'un Corollaire de la précedente : car puiſque dans cette proportion les deux termes du milieu ſont les mêmes, & que leur ſomme eſt égale à celle des extrêmes, cette ſomme des extrêmes eſt donc double du terme moyen, ou de la moyenne arithmetique.

Soit la proportion continue arithmerique $\div a.b.c.$ elle eſt la même que celle-ci $a.b:b.e.$ Or $a+c=b+b$ * ou $2b$: Donc $a+c$ eſt double de b. C. q. f. d. * N°. 731.

PROBLEMES.

I.

733. *Trois quantités* a, b & c *étant données pour les trois premiers termes d'une proportion arithmetique, trouver le quatriéme terme de cette proportion.*

Soit x cette quatriéme proportionnelle arithmetique, on aura $a.b:c.x$ & $a+x=b+c$ *: Or, ſi l'on diminue ces deux quantités égales de la même quantité a, il reſtera $x=b+c-a$. qui fait voir que pour avoir x, ou le quatriéme terme demandé, il faut ajouter enſemble le ſecond & le troi- * N. 731.

ſiéme terme donnés, & retrancher de leur ſomme le premier a.

Si $a=5$, $b=9$ & $c=8$. on aura $b+c-a=9+8-5=12=x$. En effet 5. 9 : 8. 12.

II.

734 *Deux quantités quelconques* a *& b étant données, trouver une moyenne arithmetique entr'elles.*

Il eſt clair qu'il faut ajouter enſemble ces deux quantités, & prendre la moitié de leur ſomme *, c'eſt-à-dire, que $\frac{a+b}{2}$ eſt égale à la moyenne arithmetique demandée.

*N°. 732.

Si $a=8$ & $b=12$. on aura $\frac{a+b}{2}=\frac{8+12}{2}=\frac{20}{2}=10$: En effet ÷ 8. 10. 12.

III.

735. *Trouver une troiſiéme proportionnelle arithmetique à deux termes donnés, ou ce qui eſt la même choſe, trouver le troiſiéme terme d'une proportion continue arithmetique.*

Soient les deux premiers termes donnés a & b, on doublera b pour avoir $2b$, & on en retranchera le premier terme a; ce qui donnera $2b-a$ pour le terme cherché. Ce qui eſt évident; car $2b$ eſt égal à la ſomme des extrêmes de cette proportion *: a eſt un de ces extrêmes : Donc l'autre eſt $2b-a$.

*N°. 732.

Si on ſuppoſe encore que $a=8$ & $b=12$, on aura $2b=24$, & $2b-a=24-8=16$. En effet 8. 12 : 12. 16. ou ÷ 8. 12. 16.

VIII.

De la Progreſſion Arithmetique.

736. ON appelle *progreſſion arithmetique* une ſuite de rapports arithmetiques égaux, dans leſquels chaque conſequent ſert d'antécedent au rapport ſuivant.

737. La progreſſion arithmetique ſe marque ainſi ∴ 5 . 7 . 9 . 11 . 13, &c. qui veut dire que 5 eſt à 7, comme 7 eſt à 9 ; comme 9 eſt à 11 ; comme 11 eſt à 13, &c. Ce qui eſt évident, puiſque ces quantitésdifferent entr'elles du même nombre 2.

738. Une progreſſion quelconque arithmetique qui va en augmentant ∴ $a . b . c . d . f$, &c. peut ſe transformer ainſi, en ſuppoſant que la quantité dont chaque conſequent ſurpaſſe ſon antécedent ſoit n, ∴ $a . a+n . a+2n . a+3n . a+4n .$ &c.

Car il eſt évident que puiſque b eſt plus grand que a de la quantité n, $a+n$ ſera égal à b ; & puiſque c eſt plus grand que b de la même quantité n, $b+n$ ſera égal à c : Mais comme $b=a+n$, on aura en mettant cette valeur à la place de b dans l'expreſſion $c=b+n=a+n+n$ ou $c=a+2n$. & ainſi des autres termes.

739. Il ſuit de-là, que chaque terme de la progreſſion arithmetique qui va en augmentant, eſt compoſé du premier terme, plus de la difference qui regne dans la progreſſion, priſe autant de fois qu'il y a de termes qui le précedent.

Ainſi, le centiéme terme de cette progreſſion ſera $a+99n$, & de même de tous les autres termes de la progreſſion.

740. Si on ſuppoſe que le premier terme ſoit zero, alors le ſecond terme ſera la difference qui regne dans la progreſſion, & chaque terme ne ſera que cette difference priſe autant de fois qu'il y aura de termes qui précederont celui dont il s'agira. Par exemple, le quatriéme terme ſera $3n$, ſi la différence eſt n; le quarante-ſeptiéme, $46n$, & ainſi des autres.

741. Si la progreſſion va en diminuant, le premier terme a ſera plus grand que le ſecond, de la différence n; & celui-ci plus grand que le troiſiéme, de la même difference.

Ainſi, l'expreſſion génerale de la progreſſion arithmetique qui va en diminuant ſera celle-ci $\div a . a-n . a-2n . a-3n$, &c. Expreſſion qui fait voir que chaque terme eſt égal au premier, moins la différence qui regne dans la progreſſion priſe autant de fois qu'il y a de termes qui le précedent.

742. Si on ſuppoſe que le premier terme de cette progreſſion ſoit zero, chaque terme ſera zero, moins autant de fois la difference qu'il y aura de termes qui le précederont. Ainſi le douziéme terme de cette progreſſion ſera $0 - 11n$, ou ſimplement $-11n$. & ainſi des autres.

THEOREME I.

743. *Dans toute progreſſion arithmetique, la ſomme des termes également éloignés des extrêmes, eſt égale à celle des extrêmes.*

Soit la progreſſion $\div a . a+n . a+2n . a+3n . a+4n . a+5n$: il faut démontrer, par exemple, que la ſomme des termes $a+n$, $a+4n$, qui ſont également éloignés des extrêmes, eſt égale à celle des extrêmes a & $a+5n$.

DEMONSTRATION.

Considerez que $a+n+a+4n=2a+5n$, & que la somme des extrêmes $a+a+5n=2a+5n$: Donc, &c.

Autrement, considerez que tous les rapports de la progression étant égaux entr'eux, on a $a.\ a+n : a+4n.\ a+5n$. Or dans toute proportion arithmetique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens*: Donc $a+a+5n=a+n+a+4n$ ou $2a+5n=2a+5n$. C. q. f. d. *N°. 731.

Si l'on prend d'autres termes également éloignés des extrêmes, comme par exemple, dans la progression précedente le troisiéme & le quatriéme, on prouvera de même que la somme de ces deux termes sera égale à celle des extrêmes.

Car le troisiéme terme contiendra le premier, plus deux fois la difference qui regne dans la progression**, c'est-à-dire, que la difference du premier au troisiéme terme sera $2n$: Or, celle du quatriéme au sixiéme sera aussi $2n$: Donc le premier sera au troisiéme, comme le quatriéme au sixiéme : Donc la somme du premier & du dernier sera égale à celle du troisiéme & du quatriéme : Donc, &c. **N°. 739.

THEOREME II.

744. *Si le nombre des termes de la progression est impair, le terme du milieu sera moyen arithmetique entre les deux extrêmes.*

Soit la progression $\div\ a.\ a+n.\ a+2n.\ a+3n.\ a+4n.\ a+5n.\ a+6n.$ dont le terme du milieu est $a+3n$; il faut démontrer que ce terme est moyen arithmetique entre les extrêmes a & $a+6n$.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que $a+3n$ étant par la ſuppoſition à égale diſtance des deux extrêmes, il differera autant du premier, que le dernier differera de lui; car ſa difference d'avec le premier eſt $3n$, comme la différence d'avec le dernier, eſt également $3n$. Donc $\div a.a+3n.a+6n$. C. q. f. d.

THEOREME III.

745. *Dans toute progreſſion arithmetique, la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes donne la ſomme de tous les termes de la progreſſion.*

Cette propoſition n'eſt qu'une ſuite ou un Corollaire de la précedente; car puiſque la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des termes également éloignés des extrêmes, & qu'il y a dans la progreſſion autant de fois la ſomme des extrêmes que ſes termes peuvent être pris deux à deux, il s'enſuit, que la ſomme des extrêmes ajoutée autant de fois à elle-même, que les termes de la progreſſion peuvent être pris deux à deux, donne la ſomme de tous les termes de la progreſſion; mais c'eſt la même choſe de multiplier cette ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, ou de l'ajouter à elle-même autant de fois qu'ils peuvent être pris deux à deux: Donc la ſomme des termes d'une progreſſion arithmetique multipliée par la moitié du nombre de ſes termes, donne la ſomme de la progreſſion.

Si la progreſſion eſt $\div a.a+n.a+2n.a+3n.a+4n.a+5n$. qui eſt compoſée de ſix termes, la ſomme des extrêmes qui eſt $a+a+5n=2a+5n$ multipliée par 3, moitié du nombre des termes, donnera $6a+15n$. qui eſt évidemment la ſomme de

toute la progreſſion, & qui eſt égale à $a+a+5n$ $=2a+5n$ ajoutée trois fois à elle-même : Donc, &c.

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+5n \\ 2a+5n \\ 2a+5n \\ \hline 6a+15n \\ \hline \end{array}\right.$$

PREMIER COROLLAIRE.

746. *Il ſuit de cette propoſition, que la moitié de la ſomme des extrêmes multipliée par le nombre des termes de la progreſſion eſt égale à la ſomme de la progreſſion, ou que la ſomme des extrêmes, multipliée par le nombre des termes eſt double de la ſomme de la progreſſion.*

Car prenant la moitié du multiplicande d'un produit, & le multipliant par un multiplicateur double de celui du premier produit, il eſt évident qu'on ne change rien au produit; & multipliant un multiplicande quelconque, par un multiplicateur double d'un premier, on a auſſi un produit double du premier produit : Donc, &c.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

747. *Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, on en aura la ſomme en multipliant le terme du milieu par le nombre des termes de la progreſſion.*

Car le terme du milieu étant moyen arithmetique entre les extrêmes *, il eſt la moitié de la ſomme des extrêmes * : Or, la moitié de la ſomme des extrêmes multipliée par le nombre des termes de la progreſſion, en donne la ſomme * : Donc, &c.

* N°. 744.
* N°. 732.
* N° 745.

PROBLEMES.

I.

748. *Trouver la ſomme d'une progreſſion arithmetique quelconque, dont le nombre des termes eſt pair.*

Soit la progreſſion ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . compoſée de huit termes.

On ajoutera enſemble le premier & le dernier, & l'on multipliera leur ſomme 16 par 4, moitié du nombre des termes de la progreſſion; le produit 64 ſera la ſomme de la progreſſion * propoſée.

* N°. 745.

II.

749. *Trouver la ſomme d'une progreſſion arithmetique, dont le nombre des termes eſt impair.*

Soit la progreſſion ÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . qui eſt compoſée de cinq termes.

On prendra le terme du milieu 8, qu'on multipliera par le nombre des termes 5, & le produit 40 ſera la ſomme de la progreſſion *.

* N°. 747.

III.

750. *Le premier & le dernier terme d'une progreſſion arithmetique étant donnés, avec la difference qui regne entre les termes de la progreſſion, trouver le nombre des termes de la progreſſion.*

Soient 10 le premier terme donné, 145 le dernier, & 3 la différence qui regne dans la progreſſion.

Pour en trouver le nombre des termes, il faut conſidérer que le dernier contient le premier, plus autant de fois la différence qu'il y a de termes qui le précedent *: Ainſi, ôtant 10 de 145, le reſte 135 contiendra autant de fois 3 qu'il y a de termes

* N. 739.

qui précedent 145. Diviſant donc 135 par 3, le quotient 45 fait voir qu'il y a 45 termes qui précedent le dernier, & qu'ainſi la progreſſion dont il s'agit, eſt compoſée de 46 termes.

Connoiſſant après cela le premier & le dernier terme de la progreſſion, plus le nombre de ſes termes, il ſera facile de trouver la ſomme de la progreſſion par les deux problêmes précedens.

IV.

751. *Le premier terme d'une progreſſion arithmetique étant donné avec la difference qui regne dans la progreſſion, & le nombre des termes, trouver la ſomme de la progreſſion.*

Soient le premier terme donné 3, la différence 2, & 12 le nombre des termes de la progreſſion.

Pour en trouver la ſomme, il faut connoître quel eſt le dernier. Il ſera le premier 3, plus 11 fois la difference 2 *; c'eſt-à-dire, qu'il ſera 25 : Or, en lui ajoutant le premier 3, on aura 28 pour la ſomme des extrêmes, laquelle étant multipliée par 6, ou par la moitié du nombre des termes, donnera 168 pour la ſomme de la progreſſion *.

* N°. 739.

* N°. 745.

APPLICATION

Des progreſſions arithmetiques aux Bataillons triangulaires, ou diſpoſés en triangles.

752. *Le Bataillon triangulaire* eſt un Corps de troupe diſpoſé en triangle, & dont les rangs augmentant également, forment une progreſſion arithmetique.

753. Si le premier rang eſt 1, & que les autres augmentent chacun d'une unité, le Bataillon for-

mera un triangle qui aura ſes trois côtés égaux, c'eſt-à-dire, qu'il ſera équilatéral ; autrement il formera un autre triangle quelconque.

PREMIER PROBLEME.

754. *On ſuppoſe un Bataillon triangulaire, compoſé de 30 rangs, dont le premier rang eſt 1, & le ſecond 3 ; on demande quel eſt le nombre des hommes de ce Bataillon.*

Il eſt évident que ce problême ſe réduit à trouver la ſomme d'une progreſſion, dont le premier, le ſecond terme, & le nombre des termes ſont connus ; & qu'ainſi il eſt le même que le précedent.

C'eſt pourquoi on trouvera d'abord le dernier terme, ou le nombre des hommes du dernier rang. La difference qui regne dans la progreſſion étant 2, le trentiéme rang, qui eſt le dernier, contiendra le premier 1, plus 29 fois la difference *, c'eſt-à-dire, qu'il ſera de 59 hommes. On lui ajoutera le premier 1 pour avoir la ſomme des extrêmes 60, laquelle étant multipliée par 15, moitié du nombre des termes, donnera 900 hommes pour la ſomme de la progreſſion, ou pour le nombre de ceux qui compoſent le Bataillon.

* N°. 739.

$$\begin{array}{r} 60 \\ 15 \\ \hline 300 \\ 60\,. \\ \hline 900. \end{array}$$

SECOND PROBLEME.

755. *Un nombre d'hommes quelconque, par exemple 400, étant donné pour en former un Bataillon triangulaire équilatéral, trouver le nombre des rangs dont il ſera compoſé.*

Comme dans ce Bataillon le premier rang eſt 1, le ſecond 2, le troiſiéme 3, &c. il s'enſuit, que

ce Problême ſe réduit à

Trouver le nombre des termes d'une progreſſion arithmetique, dont le premier terme eſt 1, la difference auſſi 1, & la ſomme 400.

RESOLUTION.

Soit le nombre des termes de la progreſſion repréſenté par n; le dernier ſera auſſi n; car il ſera l'unité priſe autant de fois qu'il y a de termes.

Cela poſé, la ſomme des extrêmes de la progreſſion ſera $1+n$., laquelle multipliée par le nombre des termes n, donnera $n+nn$ ou $nn+n$ pour le double de la ſomme de la progreſſion *. c'eſt-à-dire, que cette expreſſion $nn+n$ ſera égale à deux fois 400 ou à 800: Or, nn eſt le quarré du nombre des termes de la progreſſion, n, en eſt la racine: Donc 800 contient le quarré du nombre des termes de la progreſſion, plus la racine de ce quarré.

* N°. 746.

Il ſuit de-là, que pour avoir la valeur de n ou le nombre des termes de la progreſſion, il faut extraire la racine quarrée de 800, de maniere qu'il y ait un reſte égal à la racine.

Extrayant donc la racine quarrée de 800, on trouve 28 avec le reſte 16. Mais comme ce reſte eſt plus petit que la racine 28, on met 7 à la place de 8, & achevant l'opération, on a le reſte 71 qui contient la racine 27: Ainſi 27 eſt le nombre des termes ou des rangs du Bataillon.

Pour le prouver, il faut chercher quelle eſt la ſomme de la progreſſion, dont le premier ter-

8|0 0	28.
4 0 0	
4 8	
Reſte - 16.	
8|0 0	27.
4 0 0	
4 7	
Reſte - 71.	

me eſt 1, le ſecond 2, & le nombre des termes 27.

On aura le dernier terme 1+26=27. & lui ajoutant le premier 1, la ſomme des extrêmes ſera 1+1+26=28. dont la moitié 14 étant multipliée par 27, nombre des termes, donnera 378, pour le nombre des hommes du Bataillon propoſé. Comme le nombre donné étoit 400, on voit qu'il reſte 22 hommes qui ne peuvent entrer dans le Bataillon, & qu'on peut employer ailleurs, ou en former un peloton * ſéparé.

14
27
98
28.
378.

COROLLAIRE.

756. Il ſuit de la réſolution du problême précédent, que pour former des Bataillons triangulaires équilatéraux, il faut, quelque nombre de Soldats que l'on ait pour cet effet, le doubler, & enſuite en extraire la racine quarrée, mais de maniere qu'il y ait un reſte égal à la racine, ou qui la contienne; & qu'alors cette racine ſera le nombre des rangs du Bataillon, dont tous les côtés ſeront égaux.

Si l'on a, par exemple, 785 hommes à diſpoſer ainſi en Bataillon triangulaire équilatéral, on commencera par les doubler, ce qui donnera 1570. on extraira la racine quarrée de ce nombre; on la trouvera de 39 avec le reſte 49 qui la contient: Donc 39 eſt le nombre des rangs de ce Bataillon. On déterminera de la même maniere celui de tous les autres de la même eſpece qu'on pourra propoſer.

1570 {39
9
670
69
Reſte 49.

* Un *peloton* eſt un nombre d'hommes qui eſt ordinairement moindre que 100.

REMARQUE.

REMARQUE.

757. Si on ſuppoſe que la différence qui regne dans la progreſſion eſt 2, c'eſt-à-dire, que le premier terme étant toujours 1, le ſecond eſt 3, le quatriéme 5, &c. le dernier terme ſera (*n* repréſentant toujours le nombre des termes) $n-1$ multiplié par 2, ou $2n-2+1$ *, & ajoutant à ce terme le premier 1, la ſomme des extrêmes ſera $2n-2+1+1$. expreſſion qui ſe réduit à $2n$, dont la moitié n étant multipliée par le nombre des termes, donnera la ſomme de la progreſſion nn *. Ainſi nommant s la ſomme de la progreſſion, on a $nn=s$, c'eſt-à-dire, le quarré du nombre des termes égal à la ſomme de la progreſſion; & par conſéquent n, qui eſt la racine quarrée de nn, eſt égal à celle de s: Enſorte, que $n=\sqrt{s}$.

* N°. 739.

* N°. 746.

758. D'où il ſuit, que dans une progreſſion arithmetique, dont le premier terme eſt 1, & le ſecond 3, le nombre des termes eſt égal à la racine quarrée de la ſomme des termes.

759. Ainſi, ſi l'on donne 400 hommes pour former un Bataillon triangulaire, dont le premier rang eſt 1, & le ſecond 3, ce qui eſt la ſeconde eſpece des Bataillons triangulaires, on trouvera le nombre des rangs de ce Bataillon, en extrayant la racine quarrée de 400 : Or, cette racine eſt 20 : Donc ce Bataillon aura 20 rangs.

$$\left\{\begin{array}{l} 4|0\,0 \\ 4 \\ \hline 0\,0\,0 \end{array}\right\} 20.$$

Pour le prouver, conſiderez que le dernier rang ſera $1+19\times2$ ou 39, & qu'en lui ajoutant 1, on aura 40 pour la ſomme des extrêmes, laquelle étant multipliée par 10, moitié du nombre des termes, donnera 400 pour la ſomme de la progreſſion, c'eſt-à-dire, le nombre propoſé.

Si l'on a de même 542 pour former un Bataillon triangulaire de même eſpece, on extraira la racine quarrée de ce nombre, laquelle ſera trouvée de 23. C'eſt donc le nombre des termes de cette progreſſion.

5|42 {23.
4
142
43
Reſ. 13.

On le prouvera comme dans l'exemple précedent, en conſidérant que le dernier terme ſera $1+2\times22=45$. Ajoutant à ce terme le premier 1, on aura 46, qui ſera la ſomme des extrêmes, dont la moitié 23 multipliée par le nombre des termes, donnera 529, auquel ajoutant le reſte 13, on aura le nombre propoſé 542.

23
23
69
46.
529
Reſte 13
542.

On opérera de même pour tous les autres Bataillons de même eſpece, quelque ſoit le nombre dont on voudra les former.

On voit par ce qui vient d'être enſeigné ſur les Bataillons triangulaires, qu'ils ne ſont pas plus difficile à calculer que les Bataillons quarrés. Pluſieurs Officiers leur donnent la préference ſur ces Bataillons, parce qu'ils donnent un plus grand front, & qu'ils ſont également face de tous côtés. Mais comme il eſt difficile de faire marcher les Soldats dans cet ordre, M. *Bottée* les croit préferables aux Bataillons quarrés, ſeulement dans les cas où il faut combattre de pied ferme, & ſe donner un grand front, ou lorſque la ſituation du terrain exige cette diſpoſition. On pourra voir dans cet Auteur la maniere de les former par des mouvemens réguliers.

IX.

DES INCOMMENSURABLES.

760. ON n'a pas deſſein dans cet article de traiter à fond la doctrine des Incommenſurables. Cela exigeroit un détail de Lemmes & de propoſitions préliminaires qui n'entrent pas dans le plan de cet ouvrage. L'objet principal qu'on s'y propoſe eſt ſeulement de donner une idée de l'incommenſurabilité des racines quarrées & cubiques des nombres qui ne ſont ni quarrés, ni cubes parfaits, & de démontrer auſſi que la diagonale du quarré eſt incommenſurable avec le côté du même quarré. Mais auparavant, on obſervera que ce qui concerne les incommenſurables étant plus curieux qu'utile, ceux qui trouveront quelques difficultés dans cet article, pourront le paſſer ſans aucun inconvénient pour la ſuite de cet ouvrage.

THEOREME I.

761. *Toute raiſon doublée de nombre à nombre a toujours pour expoſans des nombres quarrés, qui ont pour racine des nombres entiers.*

C'eſt-à-dire, que la raiſon doublée de nombre à nombre étant réduite à ſes plus ſimples termes, chaque terme ſera un nombre quarré, dont la racine ſera un entier.

DEMONSTRATION.

Soit, par exemple, la raiſon de 2 à 3 qui étant

multipliée par celle de 4 à 6, qui lui eſt égale, donne la raiſon doublée de 8 à 18, qui ſe réduit à celle de 4 à 9, en diviſant chacun de ſes deux termes par 2, ce qui n'en change pas le rapport * : Or, 4 & 9 ſont les plus ſimples termes de cette raiſon, car ils n'ont que l'unité pour commun diviſeur * ; & ils ont chacun pour racine un nombre entier; ſçavoir, le premier 2, & le ſecond 3 : Donc, &c.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & . & 3 \\ 4 & . & 6 \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} 8 & . & 18 :: 4 . 9. \end{array}$$

* N°. 624.

* N°. 602.

762. Cette démonſtration qui paroît particuliere à la raiſon doublée qu'on a choiſie, peut être rendue génerale, en conſidérant

Que toute raiſon doublée étant compoſée de deux raiſons égales, & les raiſons égales pouvant être exprimées par les mêmes termes *, ſi l'on choiſit les deux plus petits qui peuvent exprimer ces raiſons égales, la doublée qui en réſultera en les multipliant enſemble, ſera auſſi exprimée par les plus petits termes poſſibles ; mais elle ſera égale à celle de ces mêmes raiſons non réduites; car les raiſons compoſées de même nombre de raiſons égales, ſont égales * : Or, les termes de la raiſon doublée des réduites ſont des nombres quarrés, puiſqu'ils ſont le produit de chaque terme par lui-même, & les racines ſont les termes des raiſons compoſantes : Ces quarrés ſont les expoſans de la raiſon doublée des raiſons compoſantes égales & non réduites : Ils ont pour racine des nombres entiers, c'eſt-à-dire, les plus petits termes qui expriment les raiſons compoſantes : Donc toute raiſon doublée de nombre à nombre a pour expoſant des nombres quarrés qui ont pour racine des nombres entiers. C. q. f. d.

* N°. 601.

* N°. 640.

763. Soit la raiſon de 3 à 9, égale à celle de 5 à

15, qu'on veut réduire aux mêmes exposans.

On cherchera le plus grand commun diviseur des deux termes de chacune de ces raisons, ainsi qu'on l'a enseigné dans les fractions N. 177 & suivans. On trouvera que celui des deux termes de la premiere raison est 3, & qu'ainsi elle se réduit à 1 & 3. que celui de la seconde est 5. ce qui la réduit, en divisant chacun de ses termes par 5, à celle de 1 à 3.

Multipliant ensemble les deux raisons réduites pour en avoir la doublée de 1 à 9; & de même les non réduites qui donneront celle de 15 à 135, qui sera égale à celle 1 à 9 *: Or 1 & 9 sont des nombres quarrés qui ont pour racines des nombres entiers; sçavoir, le premier 1, & le second 3, ils sont les exposans du rapport de 15 à 135 : Donc ce rapport ou cette raison doublée a pour exposans des nombres quarrés qui ont pour racines des entiers. Il est évident qu'il en sera de même de toutes les autres raisons doublées de nombre à nombre.

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \cdot 3 :: 3 \cdot 9 \\ 1 \cdot 3 :: 5 \cdot 15 \\ \hline 1 \cdot 9 :: 15 \cdot 135. \end{array}\right.$$

* N°. 640.

COROLLAIRE.

764. il suit de-là, que lorsqu'on aura une raison doublée, dont les exposans seront des nombres quarrés, ou considerés comme quarrés, qui n'auront pas des nombres entiers pour racine, les raisons composantes ou sous-doublées de ces quarrés ne seront pas de nombre à nombre, c'est-à-dire, qu'elles ne pourront être exprimées par aucun nombre, & qu'ainsi elles seront incommensurables.

THEOREME II.

765. *Tout nombre entier, consideré comme nombre*

quarré, qui n'a pas pour ſa racine un entier, n'aura aucun nombre pour ſa racine.

Soit, par exemple 18, qui conſideré comme nombre quarré n'a pas pour ſa racine un entier; car elle n'eſt ni 4, puiſque $4\times4=16$, nombre plus petit que 18; ni 5, puiſque $5\times5=25$ qui eſt plus grand que 18; ainſi cette racine eſt entre 4 & 5. Elle n'eſt donc pas un nombre entier. Il faut démontrer qu'aucun autre nombre ne peut l'exprimer.

DEMONSTRATION.

Soit ſuppoſé une moyenne proportionnelle x entre 1 & 18. On aura $1.x::x.18$. Mais dans la proportion continue, le quarré du premier terme eſt à celui du ſecond, comme le premier eſt au troiſiéme *; c'eſt-à-dire, que $1.x::x.18$ donne $1.xx::1.18$. Or, le quarré de l'unité 1, qui eſt 1, & celui de x qui eſt xx, ſont en raiſon doublée de leurs racines *: Mais ils ont pour expoſans des nombres 1 & 18, qui n'ont pas tous les deux pour racines quarrées des nombres entiers: Donc les racines de 1 & de xx ſont incommenſurables. Ce qui prouve déja que la moyenne proportionnelle x eſt incommenſurable avec l'unité, ou qu'elle ne peut s'exprimer en nombres. Mais cette moyenne proportionnelle eſt égale à la racine quarrée de 18; car la proportion $1.x::x.18$ donne, avec le produit des extrêmes & des moyens, $18=xx$, & par conſequent $\sqrt{18}=x$: Donc puiſque x eſt incommenſurable avec l'unité, la racine de 18 qui lui eſt égale, l'eſt également: Donc cette racine ne peut s'exprimer par aucun nombre. C. q. f. d.

* N°. 694.

* N°. 638.

REMARQUE.

766. Ces racines incommenſurables s'expriment

en lignes dans la Géometrie avec la même facilité que les autres : Mais quoiqu'elles ne puiſſent pas être déterminées exactement en nombres, on approche néanmoins de leur véritable valeur autant qu'on le veut. On ſe ſert pour cet effet de la méthode expliquée N. 500 pour l'approximation des racines quarrées.

En ſuivant la méthode qu'on a employé pour démontrer le premier Théorême de cet article, on démontrera auſſi :

THEOREME III.

767. *Que toute raiſon triplée de raiſons compoſantes de nombre à nombre, aura néceſſairement pour expoſans des nombres cubiques qui auront pour racines des nombres entiers.*

D'où il ſuivra,

768. *Que ſi l'on a une raiſon triplée qui n'ait pas pour expoſans des nombres cubiques, ou conſiderés comme tels, dont les racines cubes ne ſoient pas des nombres entiers, les raiſons compoſantes de cette raiſon triplée ne ſeront pas de nombre à nombre.*

Ces deux propoſitions étant ſuppoſées démontrées, il eſt aiſé de démontrer auſſi :

THEOREME IV.

769. *Qu'un nombre entier, conſideré comme nombre cubique, qui n'a pas pour ſa racine un entier, n'aura aucun autre nombre pour ſa racine.*

Soit un nombre quelconque 2, conſideré comme nombre cubique, qui n'a pas pour ſa racine cube un

entier, car il eſt aiſé de voir qu'elle n'eſt pas 1, puiſque $1\times1\times1=1$, qui eſt plus petit que 2, & qu'elle n'eſt pas 2, puiſque $2\times2\times2=8$, qui eſt plus grand que 2 : Donc elle eſt entre 1 & 2. Il faut démontrer qu'aucun nombre que ce ſoit ne peut l'exprimer.

DEMONSTRATION.

Soit ſuppoſé deux moyennes proportionnelles entre 1 & 2, dont la premiere ſoit repréſentée par x. On aura alors une proportion continue de 4 termes : Or, dans cette proportion le cube du premier terme eſt à celui du ſecond, comme le premier terme eſt au quatriéme * ; c'eſt-à-dire, que $1 . x^3 :: 1 . 2$. Mais le cube de 1, qui eſt 1, eſt au cube de x qui eſt xxx ou x^3 en raiſon triplée des racines, c'eſt-à-dire, de 1 à x. * : cette raiſon triplée a pour expoſans les deux nombres 1 & 2 qui n'ont pas pour racines cubes des nombres entiers ; Donc les raiſons compoſantes de 1 à x ne ſont pas de nombre à nombre. Mais x eſt égale à la racine cube de 2 ; car la proportion $1 . x^3 :: 1 . 2$. donne avec le produit des extrêmes & celui des moyens $2=x^3$. Donc $\sqrt[3]{2}=x$. Donc puiſque x ne peut être exprimée en nombre la racine cube de 2 ne peut l'être également : Donc un nombre entier qui n'a pas pour ſa racine cube un entier, n'a aucun autre nombre pour ſa racine. C. q. f. d.

* N°. 695.

* N°. 638.

THEOREME V.

Pl. 1. Fig. 2. 770. *Si l'on a un quarré quelconque A B C D dans lequel on tire la diagonale D B, elle ſera incommenſurable avec le côté A B du même quarré.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que le triangle D A B étant rectangle, & D B ſon hypothenuſe, l'on a $DB^2 = AD^2 + AB^2$, c'eſt-à-dire, le quarré de l'hypothenuſe égal à celui de chacun des deux autres côtés (N. 460.) Mais comme $AD^2 = AB^2$, $AD^2 = AB^2$, & par conſéquent $AD^2 + AB^2 = 2AB^2$: Donc $DB^2 = 2AB^2$: Donc le quarré de l'hypothenuſe ou de la diagonale D B, vaut deux fois celui de A B, c'eſt-à-dire, que ces deux quarrés ſont entr'eux comme 2 eſt à 1; mais ils ſont en raiſon doublée de leurs racines *, & leurs expoſans 2 & 1 ne ſont pas des nombres quarrés qui ayent pour racines des entiers, 2 n'étant ni le produit de 2 par 2, qui eſt 4, ni celui de 1 par 1, qui eſt 1: Donc la raiſon doublée de D B à A B n'a pas pour expoſans des nombres quarrés dont les racines ſoient des nombres entiers: Donc les termes des raiſons compoſantes de la doublée de ces quarrés, c'eſt-à-dire, celle de D B à A B, ne ſont pas de nombre à nombre *: Donc la diagonale D B eſt incommenſurable avec le côté du quarré A B. C. q. f. d.

* N°. 638.

* N°. 764.

REMARQUES.

I.

771. Quoique la diagonale du quarré ſoit incommenſurable avec le côté du même quarré, leurs quarrés ſont commenſurables entr'eux, car le premier eſt au ſecond, comme 2 eſt à 1.

II.

772. Les Géometres, qui appellent *puiſſance*,

le produit des grandeurs par elles-mémes, c'eſt-à-dire, les quarrés & les cubes, &c. expriment l'incommenſurabilité de la diagonale du quarré avec ſon côté, & la commenſurabilité des quarrés de ces deux lignes, en diſant, qu'*elles ſont incommenſurables entr'elles, mais qu'elles ſont commenſurables en puiſſances.*

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE VIII.

I.

Des Triangles ſemblables.

773. LES *triangles ſemblables* ſont ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun ; on les appelle auſſi par cette raiſon *équiangles.*

774. Il ſuit de cette définition, que pour démontrer que deux triangles ſeront ſemblables, il ſuffira de faire voir qu'ils auront deux angles égaux, chacun à chacun ; car alors, puiſque les trois angles de tout triangle valent deux droits (N. 224.) le troiſiéme angle du premier ſera auſſi égal au troiſiéme angle du ſecond : Donc ils auront tous leurs angles égaux, comparés chacun à chacun : Donc ils ſeront ſemblables.

775. On appelle *côtés homologues* dans les triangles ſemblables les côtés qui ſont oppoſés aux an-

gles égaux des differens triangles.

Pl. 1. Fig. 3. Par exemple, ſi les triangles X & Y ſont ſemblables, & que l'angle A du premier ſoit égal à l'angle *a* du ſecond, le côté CB oppoſé à l'angle A eſt homologue au côté *cb* du ſecond triangle, oppoſé auſſi à l'angle *a* égal à A; & ainſi des autres côtés.

AVERTISSEMENT.

On ſe ſervira dans la ſuite de cet Ouvrage des mêmes expreſſions abregées, expliquées dans le N. 578. & dans les ſuivans du Livre précedent.

Ainſi AB+CD marquera l'addition de ces deux quantités; AB—CD, que CD eſt ſouſtraite ou retranchée de AB; AB=CD, que AB eſt égale à CD; AB×CD, le produit de ces deux quantités; $\overline{AB}^{2}$, le quarré de AB; $\overline{AB}^{3}$, le cube, &c.

On exprimera auſſi les quantités proportionnelles ou les rapports égaux de cette maniere, AB.CD:: EF.GH, qui veut dire que AB eſt à CD, comme EF eſt à GH, &c.

Pour démontrer les propoſitions ſuivantes, on établira d'abord celle-ci.

THEOREME I.

Fig. 4. 776. *Les parallelogrammes ſont en raiſon compoſée de leur baſe & de leur hauteur.*

Soient les parallelogrammes ABCD, *abcd*, je dis qu'ils ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs baſes AB, *ab*, & de leurs hauteurs DE, *de*.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que ces parallelogrammes ſont égaux aux produits AB×DE, *ab*×*de* de leur baſe par leur

hauteur *, & que ces produits donnent la raiſon compoſée de AB à *ab*, & de DE à *de* *: Donc, &c. * Nº. 419. * Nº 631.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

777. *Que ſi les parallelogrammes ont la même hauteur, ils ſeront entr'eux comme leurs baſes, & que s'ils ont des baſes égales, ils ſeront dans la raiſon de leurs hauteurs.*

Car ſoient les deux parallelogrammes X & Y, ſi on appelle *a* la baſe du premier X, *b* celle du ſecond Y, *c* la hauteur de chacun ; on aura *ac* pour le produit du premier, & *bc* pour celui du ſecond * : Mais lorſqu'on multiplie deux quantités différentes *a* & *b* par une même quantité *c*, on ne change point le rapport de ces quantités * : Donc *ac*. *bc* :: *a*. *b*. Donc, &c. Pl. 1. Fig. 5. * Nº. 419. * Nº. 624.

778. On démontrera de la même maniere que ſi les baſes ſont égales, les parallelogrammes ſeront entr'eux comme les hauteurs.

DEUXIÉME COROLLAIRE.

779. *Les triangles ſont auſſi en raiſon compoſée de leurs baſes, & de leurs hauteurs.*

Car ils ſont les moitiés des parallelogrammes de mêmes baſes & mêmes hauteurs : Or, les moitiés ſont entr'elles comme leurs Touts * : Donc, &c. * Nº. 623.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

Par la même raiſon,

780. *Les triangles qui ont des hauteurs égales, ſont en même raiſon que leurs baſes, & ceux qui ont des baſes égales ſont entr'eux comme leurs hauteurs.*

Pl. 1. Fig. 6. Ainſi, ſi l'on a deux triangles ACB, BCD dont les baſes AB, BD ſoient ſur la même ligne droite AD, & le ſommet au même point C, ils ſeront entr'eux comme leurs baſes AB & BD, car alors ils auront la même hauteur CE, c'eſt-à-dire, la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet commun C ſur la ligne des baſes AD.

THEOREME II.

781. *Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle quelconque, par une ligne parallele à ſa baſe, ils ſeront coupés proportionnellement.*

DEMONSTRATION.

Fig. 7. Soit le triangle ACB, dont les deux côtés CA, & CB ſont coupés en deux parties quelconques par la ligne DE parallele à la baſe AB, il faut démontrer qu'ils ſont coupés proportionnellement, ou que leurs parties font enſemble une proportion, c'eſt-à-dire, que BE, EC :: AD. DC.

Pour cela, ſoient tirées les lignes AE & DB, elles donneront les deux triangles égaux ADE & DEB; car prenant DE pour la baſe de ces deux triangles, ils auront la même baſe; ils auront auſſi la même hauteur, puiſqu'ils ſont entre les deux paralleles DE & AB : Donc ils ſeront égaux *.

* N°. 429.

Ainſi, ſi l'on repréſente par *a* l'un de ces triangles, l'autre ſera auſſi repréſenté par la même lettre *a*. ſoit nommé *b* le triangle DCE.

Cela fait, conſiderez que les triangles BDE, EDC qui ont leur baſe ſur la même ligne BC, & leur ſommet au même point D ſont entr'eux comme leurs baſes BE & EC * : Enſorte, qu'on a, *a*. *b* :: BE. EC. Obſervez auſſi que les deux triangles AED, DEC ont leur ſommet au même point E,

* N°. 780.

& leurs baſes ſur la même ligne AC, & qu'ainſi l'on a encore *a*. *b* :: AD. DC: Or, deux rapports égaux à un même rapport, ſont égaux entr'eux * : Donc BE. EC :: AD. DC. C. q. f. d. * N°. 616.

COROLLAIRE.

782. Puiſque BE. EC :: AD. DC, l'on aura en renverſant, EC. BE :: DC. AD *. * N°. 680.

En permutant BE. AD :: EC. DC *. * N°. 681.

Et en compoſant BE + EC, c'eſt-à-dire, BC. EC :: AD + DC ou AC. DC *. * N. 682.

THEOREME III.

783. *Si les deux côtés d'un triangle ſont coupés proportionnellement par une ligne droite quelconque, elle ſera parallele à la baſe du triangle.*

Soit le triangle ACB, dont les côtés ſont coupés proportionnellement par la ligne DE, il faut démontrer qu'elle eſt parallele à la baſe AB de ce triangle. Pl. 1. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que la ligne DE ne ſoit point parallele à AB; on pourra par une de ſes extrêmités D mener une ligne DG parallele à cette baſe. Alors on aura par la propoſition précedente CD. DA :: CG. GB.

Mais, puiſque l'on ſuppoſe que DE coupe proportionnellement les deux côtés CA & CB du triangle en D & en E, l'on a auſſi CD. DA :: CE. EB. Il ſuit de-là, que les rapports de CG à GB. & de CE à EB, ſeront égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont égaux chacun au rapport de CD à DA *; mais il eſt abſurde que ces deux rapports ſoient égaux : car CG étant plus grand que CE, & GB plus petit que EB, * N°. 616.

le rapport de C G à G B ſera plus grand que celui de
* N°. 610. C E à E B, ou de C D à D A * : Donc D G n'eſt pas parallele à A B : Or, il eſt évident qu'on peut démontrer de la même maniere que toutes les lignes qu'on tirera du point D au-deſſus ou au-deſſous de D E ne ſeront pas paralleles à A B : Donc, comme il eſt clair que de D on peut mener une parallele à A B, il s'enſuit, qu'il n'y a que la ſeule ligne D E qui coupe les côtés du triangle A C B proportionnellement qui puiſſe être cette parallele : Donc, &c.

Cette propoſition eſt la converſe de la précedente.

THEOREME IV.

784. *Les triangles ſemblables ont les côtés homologues proportionnels.*

Pl. 1. Fig. 9. Soient les triangles ſemblables A C B, B D E, dans leſquels l'angle *a* du premier eſt égal à l'angle *d* du ſecond, l'angle *b* à l'angle *e*, & *c* à *f* : il faut démontrer que les côtés de ces triangles oppoſés aux angles égaux, c'eſt-à-dire, les homologues ſont proportionnels, ou que A B. B D :: A C. B E :: B C. D E.

DEMONSTRATION.

Fig. 10. Soient poſés les deux triangles A C B, B E D ſur la même ligne ; enſorte, que leurs deux baſes A B & B D n'en faſſent qu'une ſeule A D, & que les angles égaux, comme *a* & *d*, *b* & *e* ſoient oppoſés ; prolongez après cela les deux côtés A C & D E, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent dans un point G.

Conſiderez alors que la ligne B C eſt parallele à D G, parce que l'angle extérieur *b* eſt égal à ſon op-
* N°. 154. poſé intérieur *e* *, & que de même B E eſt parallele à A G, l'angle extérieur *d* étant auſſi égal à ſon oppoſé

posé intérieur *a* ; d'où il suit, que le quadrilatere C B E G est un parallelogramme, puisqu'il a ses côtés opposés paralleles *, & qu'ainsi C G = B E, & C B = G E *. * N°. 293. * N°. 299.

Présentement si l'on considere le triangle total A D G, qu'on prenne A pour son sommet, & D G pour sa base, ses deux côtés A D & A G seront coupés proportionnellement par la parallele B C, ensorte qu'on aura A B. B D :: A C. C G ou B E *. * N°. 781.

Si l'on prend aussi le point D pour le sommet du même triangle, G A sera sa base, & ses deux côtés D A & D G seront coupés proportionnellement par la parallele B E, l'on aura donc D B. B A :: D E. E G ou B C.

Ou en renversant B A. D B :: B C. D E, donc les deux rapports de A C à B E & de B C à D E sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont égaux à celui de A B à B D *: Donc ils sont tous trois égaux ; mais ces rapports sont ceux des côtés homologues des deux triangles semblables proposés : Donc ces triangles ont leurs côtés homologues proportionnels. *Ce qu'il falloit démontrer.* * N°. 616.

REMARQUES.

I.

785. On ne peut assez faire observer aux Commençans quelle est l'importance de cette proposition. Elle est, pour ainsi dire, l'ame de toute la Géometrie, & il faut la sçavoir parfaitement, pour n'être point embaraſſé dans le grand nombre d'autres propositions qu'on démontre par son secours : Il faut sur-tout s'appliquer à bien distinguer les côtés homologues pour ne point se tromper dans l'*analogie* ou l'arrangement des termes de la proportion qu'on forme avec ces côtés.

Pl. 1. Fig. 11. Pour cela, il faut examiner dans tous les triangles ſemblables quels ſont les angles égaux de chacun; car c'eſt par leur connoiſſance qu'on trouve d'abord les côtés homologues: Enſorte que ſi l'on a deux triangles ſemblables X & Y, & que l'on commence la proportion par les côtés de X; ſi l'on prend pour le premier terme A C, oppoſé à l'angle B, il faut chercher dans le ſecond triangle Y, quel eſt l'angle égal à B. Si on ſuppoſe que c'eſt F, le côté D E, oppoſé à cet angle, ſera le côté homologue à A C. On déterminera de la même maniere les autres côtés homologues de ces deux triangles.

Pour mettre cet arrangement plus aiſément dans l'eſprit, on va appliquer la précedente propoſition à la réſolution de pluſieurs problêmes qui pourront ſervir à la rendre plus familiere.

I I.

786. Mais auparavant il faut encore remarquer que tous les problêmes de Trigonometrie qu'on a réſolu à la fin du troiſiéme Livre, & ceux qui concernent la méthode de lever des plans, qui ſont à la fin du quatriéme, ne ſe démontrent en rigueur, que par la proprieté des triangles ſemblables, c'eſt-à-dire, par la proportionalité de leurs côtés homologues.

Car les triangles qu'on a conſtruits ſur le papier pour réſoudre ces problêmes, ſont ſemblables à ceux du terrain, leurs angles étant égaux chacun à chacun par la conſtruction: Donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe qu'on ait donné à l'échelle une grandeur quelconque, comme par exemple, celle d'un pouce pour repréſenter une toiſe, comme un pouce eſt la 72e partie d'une toiſe, toutes les toi-

ſes de la baſe du triangle du papier ſont la 72e partie de celles du terrain, & par conſéquent la baſe entiere du premier eſt la 72e partie de celle du ſecond : Or, à cauſe de la proportionalité de ces côtés homologues, chaque autre côté du triangle du papier eſt auſſi la 72e partie du côté homologue, correſpondant dans le triangle du terrain : Donc il contient autant de 72es de toiſes que ce côté en contient ſur le terrain ; mais chaque 72e de toiſe du terrain repréſente une toiſe de l'échelle : Donc le nombre des toiſes de l'échelle que contient chaque côté du triangle du papier, répond au nombre des toiſes du terrain que contient le côté correſpondant du triangle du terrain.

PROBLEMES.

I.

787. *Trouver la hauteur d'une ligne AB perpendiculaire à l'horiſon, acceſſible par ſon extrémité A, ſans ſe ſervir du demi-cercle.*

RESOLUTION.

Il faut avoir deux batons DE, CF de differentes longueurs ; planter perpendiculairement au terrain (*a*) le plus grand DE à une diſtance AD, priſe à volonté du point A, & le ſecond de la même ma- Pl. 1. Fig. 12.

(*a*) Pour planter ainſi un baton ou un piquet perpendiculairement au terrain, il faut avoir un plomb attaché au bout d'une ficelle, & appuyer l'autre bout de cette ficelle au haut du baton ; enſuite incliner ou relever le baton, juſqu'a ce que le plomb ſe trouvant dans une ſituation libre, le baton ſoit ſenſiblement dans la même direction que la ficelle, c'eſt-à-dire, que le plomb ſans être appuyé deſſus ne s'en écarte point ; alors le baton ſera ſenſiblement perpendiculaire à l'horiſon.

niere dans un point C, au-delà de D; enſorte qu'en regardant par l'extrémité F du baton F C, & par celle de D E on apperçoive l'extrémité B de la ligne A B.

Cela fait, on imaginera que par le point F on a mené F H parallele au terrain C A, & on imaginera auſſi F B; alors on aura deux triangles ſemblables F G E, F H B; car l'angle F eſt commun à chacun de ces triangles, & les angles en G & en H ſont droits: Donc le troiſiéme angle du premier eſt égal
* N°. 773. au troiſiéme du ſecond: Donc ils ſont ſemblables *: Donc ils ont leurs côtés homologues proportion-
* N°. 784. nels *.

Ainſi F G oppoſé à l'angle E dans le premier, eſt à F H oppoſé à l'angle B dans le ſecond, qui eſt égal à E, comme G E, dans le premier, eſt à H B dans le ſecond, ces deux côtés étant oppoſés au même angle F, c'eſt-à-dire, que l'on a F G. F H :: E G. B H. Les trois premiers termes de cette proportion ſont connus, puiſque F G & G E peuvent ſe meſurer aiſément, & que l'on ſuppoſe qu'on peut meſurer auſſi C A ou F H qui lui eſt égal: Donc le quatriéme terme H B le ſera auſſi, & par conſéquent A B en ajoutant à B H la hauteur A H qui eſt égale à F C à cauſe
* N°. 162. des paralleles F H & C A *.

Si on ſuppoſe F G de ſix pieds, F C de trois pieds, D E de 8, & F H de 30, l'on aura E G de cinq pieds, parce que D G = F C; alors la proportion précedente ſe changera en celle-ci.

* N°. 670. $6 . 30 :: 5 . HB = \frac{30 \times 5}{6} = \frac{150}{6} = 25.$

Ajoutant à ces 25 pieds la hauteur H A égale au baton C F qui eſt de trois pieds, on aura A B = 28 pieds.

II.

Pl. 2. Fig. 1. 783. *Meſurer la diſtance d'un point quelconque A*

d'une tranchée, à l'angle ſaillant B du chemin couvert.

Il faut au point A élever A C perpendiculaire à A B, & d'une grandeur à volonté; faire auſſi C D d'une grandeur arbitraire & perpendiculaire à A C; imaginer enſuite la ligne B D, & remarquer le point E où elle coupe A C; alors on aura les deux triangles ſemblables A B E, E C D; car ils ont chacun un angle droit A & C, & les angles B E A, D E C oppoſés au ſommet égaux *: Donc ils ont les côtés ho- * N°. 774.
logues proportionnels.

Ainſi E C oppoſé à l'angle D du triangle E C D, eſt à A E oppoſé à l'angle B dans le ſecond (lequel angle eſt égal à D) comme C D oppoſé à l'angle E dans le premier triangle, eſt à A B oppoſé au même angle dans le ſecond, c'eſt-à-dire, que, E C. E A :: C D. A B.

Si on ſuppoſe que A E = 24. toiſes E C = 12. & C D, 60, l'on aura la proportion précedente, changée en celle-ci, 12. 24 :: 60. A B = $\frac{24 \times 60}{12}$ * = * N°. 670.
120 toiſes.

Démonſtration de l'opération dont on s'eſt ſervie pour couper une ligne en pluſieurs parties égales avec le compas de proportion.

789. On a donné dans le premier Vol. N. 171. la maniere de diviſer une ligne droite en tel nombre de parties égales que l'on veut avec le compas de proportion; voici le lieu de démontrer cette opération : Elle ſe tire directement de la proprieté des triangles ſemblables.

Soit la ligne E F qu'on veut diviſer, par exem- Pl. 1. Fig. 13.
ple, en trois parties égales, & l'angle A C B, celui que font enſemble les deux branches du compas de

proportion. Ayant porté cette ligne ſur les deux mêmes nombres D & G de ces branches, qui ſe diviſent exactement en trois, comme ſur 120 & 120, on a D G = E F : ſoit C H la troiſiéme partie de C D & C I la même partie de C G ou C D ; je dis que H I ſera auſſi la troiſiéme partie de D G ou E F.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les triangles C D G & C H I ſont ſemblables, car H I qui coupe proportionnellement les deux côtés C D & C G du triangle D C G eſt par cette raiſon parallele à D G* : Donc les angles C H I, C D G ſont égaux de même que C I H & C G D *: Donc les triangles C D G & C H I ſont ſemblables : Donc ils ont les côtés homologues proportionnels : Or, C H eſt la troiſiéme partie du côté C D du grand triangle : Donc H I, baſe du petit, eſt de même la troiſiéme partie de D G ou de E F : Donc &c.

* N°. 783.
* N°. 153.

THEOREME V.

790. *Les triangles qui ont leurs côtés proportionnels ſont ſemblables ou équiangles.*

DEMONSTRATION.

Pl. 2. Fig. 2

Soient les deux triangles A C B, *a c b.* qui ont leurs côtés proportionnels. Il faut démontrer qu'ils ſont ſemblables, ou qu'ils ont les angles égaux chacun à chacun.

Soient portés les côtés *a c* & *c b* du plus petit ſur les côtés A C & C B du grand ; ſçavoir, le premier de C en *f*, & le ſecond de C en *g* : ſoit tiré *f g*, elle ſera parallele à A B ; car par la ſuppoſition C A. C *f* :: C B. C *g*, ce qui donne, en diviſant, C A — C *f*. C *f* :: C B — C *g*. C *g** qui ſe réduit en mettant *f* A à la place du premier terme, & B *g* à celle

* N°. 684.

du troiſiéme $fA.Cf::Bg.Cg$. D'où il ſuit, que fg coupe proportionnellement CA & CB, & qu'elle eſt parallele à AB *. * N°. 783.

Les deux triangles Cfg, CAB ſont alors évidemment ſemblables, car à cauſe des paralleles fg & AB, les angles Cfg, CAB ſont égaux, de même que Cgf & CBA * : Donc ils ont deux angles égaux chacun à chacun : Donc ils ſont équiangles *. * N°. 152. * N°. 774.

Il reſte à démontrer que le triangle acb eſt égal & ſemblable au triangle fCg, c'eſt-à-dire, qu'il a ſes trois côtés égaux à ceux de ce triangle ; car ſi cela eſt, il aura auſſi ſes trois angles égaux à ceux du même triangle *, & par conſéquent à ceux de ACB ; ainſi il ſera ſemblable à ce triangle ; ce qui eſt l'objet de la propoſition. * N°. 241.

Conſiderez d'abord que par la conſtruction les deux côtés Cf, Cg du triangle fCg ſont égaux aux deux côtés ca, cb du ſecond, il ne reſte donc plus qu'à démontrer que $fg = ab$.

Pour cela, les triangles Cfg & CAB donnent $Cf.CA::fg.AB$.

Et par la ſuppoſition que les côtés des deux triangles propoſés ſont proportionnels, l'on a auſſi $ca.CA::ab.AB$: Or $ca = Cf$: Donc au lieu de ca dans cette proportion, on peut mettre Cf, & elle devient alors $Cf.CA::ab.AB$: Or, les rapports de fg à AB & de ab à AB qui ſont égaux au même rapport de Cf à CA, ſont égaux entr'eux * : Donc $fg.AB::ab.AB$. Dans cette derniere proportion, les conſequens AB & AB ſont égaux : Donc les antécedens fg & ab le ſont auſſi * : Donc le triangle acb a ſes trois côtés égaux à ceux de fCg : Donc il lui eſt ſemblable de même qu'au triangle ACB : Donc les triangles qui ont les côtés proportionnels ſont ſemblables. C. q. f. d. * N°. 616. * N°. 696.

THEOREME VI.

791. *Si les deux côtés d'un triangle ſont proportionnels aux deux côtés d'un autre triangle, & que l'angle compris par les deux côtés du premier ſoit égal à celui qui eſt compris par les deux du ſecond, ces triangles ſont ſemblables.*

Pl. 2. Fig. 2. Soient les deux triangles C A B & *c a b*, dont les côtés C A, C B du premier ſont proportionnels aux côtés *c a* & *c b* du ſecond, & ſoit l'angle C égal à l'angle *c*, il faut démontrer qu'ils ſont ſemblables.

DEMONSTRATION.

Suppoſez pour cet effet que le petit triangle *c a b* ſoit porté ſur le grand, mais de maniere que *c a* ſoit poſé exactement ſur C A. On ſuppoſe que *a* rombe en *f*; le côté *c b* tombera ſur C B à cauſe de l'égalité des angles C & *c*; on ſuppoſe qu'il ſe termine en *g*. Il eſt évident que le triangle *g* C *f* eſt égal & ſemblable au triangle *a c b* *: Ainſi, ſi l'on démontre qu'il eſt ſemblable à C A B, on aura démontré que *a c b* eſt auſſi ſemblable à ce triangle; ce qui eſt l'objet de la propoſition.

* N°. 243.

Conſiderez que par la ſuppoſition C A. C *f* :: C B. C *g*, d'où l'on a en diviſant, C A — C *f*. C *f* :: C B — C *g*. C *g** : Mais comme C A — C *f* = A *f* & C B — C *g* = B *g*, on peut mettre dans cette proportion ces dernieres grandeurs à la place des premieres, & elle donnera alors A *f*. C *f* :: B *g*. C *g*, ce qui prouve que *f g* eſt parallele à A B*, & qu'ainſi le triangle C *f g* eſt ſemblable à C A B : Donc le triangle *c a b* qui eſt égal & ſemblable à ce dernier triangle, l'eſt auſſi à C B A : Donc, &c.

* N°. 684.

* N°. 783.

THEOREME VII.

792. *Si l'on coupe en deux également l'angle du ſommet d'un triangle quelconque, par une ligne prolongée juſqu'à ſa baſe, les deux parties de cette baſe ſeront proportionnelles aux deux côtés du triangle.*

Soit le triangle A C B dont l'angle du ſommet C eſt coupé en deux également par la ligne C D; il faut démontrer que les deux parties B D & D A de ſa baſe A B ſont proportionnelles aux deux côtés C B & C A, ou que B D. D A :: B C. C A. Pl. 2. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Prolongez B C en E, enſorte que C E = C A; tirez E A qui ſera parallele à C D.

Pour le prouver, conſiderez que par la conſtruction le triangle E C A eſt iſoſcelle, & qu'ainſi l'angle E eſt égal à E A C *; que l'angle extérieur A C B qui vaut ſeul ces deux angles * étant coupé en deux parties égales par C D, chacune de ces parties eſt égale à l'angle E : Donc l'angle D C B eſt égal à E : Donc puiſque entre les deux lignes C D & E A l'angle extérieur B C D eſt égal à ſon oppoſé intérieur E; ces deux lignes ſont paralleles *.

* N°. 230.
* N°. 228.
* N° 154.

Conſidérant à préſent le triangle E A B dont les deux côtés B E & B A ſont coupés proportionnellement par C D parallele à E A, l'on a B D. D A :: B C. C E *, ou mettant C A à la place de C E qui lui eſt égal, l'on aura B D. D A :: B C. C A. C. q. f. d.

* N°. 781.

THEOREME VIII.

793. *Si du ſommet de l'angle droit d'un triangle rectangle A C B on abbaiſſe une perpendiculaire C D* Figure 4.

ſur l'hypotenuſe AB, elle le partagera en deux autres triangles ſemblables au total ACB, & ſemblables entr'eux.

Pour démontrer cette propoſition, il faut faire voir que les angles des triangles CAB, CAD, & CDB ſont égaux chacun à chacun, ou qu'ils ont chacun deux angles égaux *. *N°. 774.

DEMONSTRATION.

1°. Le triangle ACD eſt ſemblable à ACB, parce qu'ils ont chacun un angle droit, & l'angle A de commun : Donc, &c.

2°. Le triangle CDB eſt ſemblable à ACB, parce qu'ils ont chacun un angle droit, & l'angle B de commun : Donc, &c.

3°. Les deux triangles CAD & CDB étant ſemblables au même triangle ACB, ſont ſemblables entr'eux : Donc, &c.

COROLLAIRE.

794. Par cette propoſition, on peut démontrer que le quarré de l'hypotenuſe AB eſt égal aux quarrés des deux autres côtés CA & CB.

Car à cauſe des triangles ſemblables ACB & ADC l'on a, AB. AC :: AC. AD, d'où l'on tire $AB \times AD = \overline{AC}^2$ *. *N°. 664.

L'on a auſſi à cauſe des triangles ſemblables ACB & CDB, AB. CB :: CB. DB. d'où l'on tire $AB \times DB = \overline{CB}^2$. Ajoutant à préſent la valeur du quarré de AC avec celle du quarré de CB, l'on aura la valeur de ces deux quarrés qui ſera ainſi $AB \times AD + AB \times DB$. Mais comme *le quarré d'une ligne eſt égal à tous les rectangles ou les produits de cette li-*

gne & de ſes parties *, & que AD & DB ſont les deux parties de AB ; il s'enſuit, que ces deux produits ſont égaux au quarré de AB, & qu'ainſi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$. C. q. f. d. ſi l'on ôte $\overline{CB}^2$ de part & d'autre du ſigne d'égalité, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2$. * & $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{CB}^2$. Et comme les racines quarrées des produits égaux ſont évidemment égales, l'on aura auſſi AB (qui eſt la racine de $\overline{AB}^2$) $= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2}$; & $AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CB}^2}$, c'eſt-à-dire, que le côté où l'hypotenuſe AB eſt égal à la racine quarrée de la ſomme des quarrés des deux autres côtés, & que chaque côté de l'angle droit eſt égal à la racine quarrée du quarré de l'hypotenuſe, moins le quarré de l'autre côté.

* N°. 459.

* N. 12.

795. On peut démontrer auſſi par le moyen des triangles ſemblables ACD & CDB, que la perpendiculaire CD eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties AD & DB de l'hypotenuſe AB.

Car AD oppoſé à l'angle ACD eſt à CD oppoſé à l'angle B dans le ſecond triangle CDB, comme le même côté CD oppoſé à l'angle A dans le premier triangle, eſt à DB oppoſé à DCB dans le ſecond, c'eſt-à-dire, que AD. CD :: CD. DC : Donc CD eſt moyenne proportionnelle entre AD & DB *. C. q. f. d.

* 653.

II.

Proprietés des Cordes, des Secantes, & des Tangentes du cercle.

THEOREME I.

Pl. 2. Fig. 5. 796. *SI deux cordes AB, CD ſe coupent dans un point quelconque E, elles ſe coupent réciproquement, ou ce qui eſt la même choſe, les deux parties AE, EB de la premiere ſont les extrêmes d'une proportion, dont les deux parties CE & ED de l'autre ſont les moyens.*

DEMONSTRATION.

Tirez les cordes AC & DB, & conſiderez que les triangles AEC & DEB ſont ſemblables; car l'angle A du premier eſt égal à l'angle D du ſecond, parce qu'ils ont tous les deux leur ſommet à la circonference du cercle, & qu'ils s'appuyent ſur le même arc CB *. L'angle C eſt auſſi égal à l'angle B par la même raiſon: Donc ces triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun: Donc ils ſont ſemblables: Ainſi le côté AE du premier, oppoſé à l'angle C, eſt au côté ED du ſecond, oppoſé à l'angle B, qui eſt égal à C; comme le côté CE du premier, oppoſé à A, eſt au côté homologue EB du ſecond, oppoſé à l'angle D = A; c'eſt-à-dire, que AE. ED :: CE. EB: Donc les deux parties AE & EB de la premiere corde AB ſont réciproques aux deux parties de la ſeconde: Donc les deux cordes AB & CD ſe coupent réciproquement. C. q. f. d.

* N. 199.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

797. *Que lorſque deux cordes ſe coupent dans un cercle, le rectangle qui a pour côtés differens les deux parties de l'une, eſt égal à celui qui a les deux parties de l'autre pour ſes côtés inégaux.*

Car ſi EB eſt la baſe d'un rectangle, & AE la hauteur, il ſera égal au produit de EB par AE; & ſi l'on a un autre rectangle, dont ED ſoit la baſe, & EC la hauteur, il ſera auſſi égal au produit de ED par CE *; mais puiſque le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens *; l'on a par la propoſition précedente $EB \times EA = ED \times CE$: Donc, &c. Pl. 2. Fig. 5. * N°. 491. * N°. 660.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

798. Si on ſuppoſe que l'une des deux cordes AB paſſe par le centre G du cercle, & que l'autre DC lui ſoit perpendiculaire, elle ſera alors coupée en deux également par le diametre AB* & l'on aura toujours AE. ED :: EC. EB. Mais comme DE & EC ſont égales, on peut mettre DE à la place de EC dans cette proportion, & l'on aura AE. DE :: DE. EB. d'où l'on tire $AE \times EB = \overline{DE}^{2}$*. Ce qui fait voir que *la perpendiculaire DE, élevée d'un point quelconque E ſur un diametre, AB eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties AE & EB de ce diametre.* C'eſt ce qu'on appelle *la proprieté du cercle.* Fig. 6. * N°. 189. * N°. 664.

THEOREME II.

799. *Si d'un point quelconque C, pris hors un cercle X, on tire deux lignes CA, CB qui coupent ſa* Fig. 7.

partie convexe, & qui ſe terminent à ſa partie concave, chaque ligne entiere & ſa partie hors le cercle ſera réciproque à l'autre ligne, & à ſa partie auſſi hors le cercle; c'eſt-à-dire, que l'on aura CA . CB :: CE . CD.

DEMONSTRATION.

Tirez les lignes AE & BD, & conſiderez que les triangles AEC, BCD ſont ſemblables; car l'angle A du premier eſt égal à l'angle B du ſecond, parce qu'ils ont leur ſommet à la circonference du cercle, & qu'ils s'appuyent ſur le même arc DE *, l'angle C eſt commun à chacun de ces triangles : Donc ils ont deux angles égaux, chacun à chacun : Donc ils ſont ſemblables *.

* Nº. 199.

* Nº. 774.

Comparant à préſent leurs côtés homologues, l'on aura CA, oppoſé à l'angle AEC, dans le premier triangle, eſt à CB, oppoſé à l'angle BDC dans le ſecond (lequel angle eſt égal à AEC) comme CE dans le premier triangle, oppoſé à l'angle A, eſt à CD dans le ſecond, oppoſé à l'angle B, qui eſt égal à A, c'eſt-à-dire, que CA . CB :: CE . CD. C. q. f. d.

COROLLAIRE.

800. Il ſuit de-là, que $CA \times CD = CB \times CE$, c'eſt-à-dire, que le rectangle qui auroit pour baſe CA, & pour hauteur CD, ſeroit égal à celui qui auroit pour baſe l'autre ligne entiere CB, & pour hauteur ſa partie, hors le cercle CE.

THEOREME III.

Pl. 2. Fig. 8.

801. *Si d'un point C, hors un cercle, on tire deux lignes CA, CB, dont l'une ſoit tangente au cercle & l'autre une ſecante, qui ſe termine à ſa partie concave, la tangente AC ſera moyenne proportionnelle entre la*

ſecante entiere CB, & ſa partie CE, hors le cercle, c'eſt-à-dire, que l'on aura CB. CA :: CA. CE.

DEMONSTRATION.

Tirez les lignes AE & AB, & conſiderez que les triangles CAB, CAE ſont ſemblables ; car l'angle B du premier eſt égal à l'angle CAE du ſecond, puiſque B qui a ſon ſommet à la circonference du cercle, a pour meſure la moitié de AE ſur lequel il s'appuye *, & que l'angle CAE formé d'une tangente & d'une corde, a pour meſure la moitié du même arc AE qui ſoutient ſa corde * ; l'angle C eſt commun à chacun de ces triangles : Donc ils ont deux angles égaux, chacun à chacun : Donc ils ſont ſemblables : Donc le troiſiéme angle CAB du premier, eſt égal au troiſiéme angle CEA du ſecond.

* N°. 197.

* N°. 196.

Comparant leurs côtés homologues ou les côtés oppoſés aux angles égaux, on aura CB oppoſé à l'angle CAB dans le grand triangle, eſt à AC oppoſé à l'angle AEC dans le petit (lequel angle eſt égal à CAB) comme le même AC oppoſé à l'angle B dans le grand, eſt à CE oppoſé à l'angle CAE dans le petit (lequel angle eſt égal à B ;) c'eſt-à-dire, que CB. AC :: AC. CE. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

302. Il ſuit de-là, *que le rectangle de la ſecante CB par ſa partie, hors le cercle CE, eſt égal au quarré de la tangente AC.*

Car, puiſque l'on a CB. CA :: CA. CE, l'on a auſſi $CB \times CE = \overline{CA}^2$ *.

* N°. 664.

II.

Pl. 2. Fig. 9. 803. Que ſi du même point C on tire tel nombre de lignes qu'on voudra, comme CB, CG, CH, &c. qui ſe terminent à la partie concave du cercle, les rectangles de ces lignes par leur partie hors le cercle, ſeront tous égaux entr'eux, étant égaux chacun au quarré de la tangente CA.

III.

Pl. 3. Fig. 1. 804. *Que ſi d'un point C, hors un cercle, on tire deux tangentes CA & CB, elles ſeront égales.*

Car tirant une ſecante quelconque, CD qui ſe termine à la partie concave du cercle, le rectangle de cette ligne entiere par ſa partie CE hors le cercle, ſera égal au quarré de chacune des tangentes CA & CB *: Donc ces quarrés ſeront égaux, & par conſéquent les tangentes CA & CB qui en ſont les racines, ſeront égales.

* N°. 801.

IV.

805. On peut par le moyen de cette même propoſition, déterminer auſſi le diametre de la terre.

Pl. 3. Fig. 2. Pour cela, il faut connoître la hauteur perpendiculaire CE d'une montagne, & ſuppoſer cette hauteur, ou la ligne qui l'exprime, prolongée juſqu'en B; elle paſſera par le centre D de la terre, étant perpendiculaire à la tangente GH qui paſſe par E *.

* N°. 176.

Il faut connoître auſſi la tangente CA *(a)*; on

(a) Cette tangente peut être connue par le moyen du *ſon*. Suppoſons qu'on ait un canon en A, & qu'en le tirant le bruit puiſſe parvenir juſqu'au ſommet A de la montagne. La propriété de la lumiere eſt de ſe tranſmettre dans un inſtant d'un lieu à un autre, enſorte qu'on ne peut remarquer d'intervalle entre celle du canon, vû en A, & la même lumiere vûe en C; ſera

ſera aſſuré que AD eſt tangente, ſi le demi-cercle étant poſé dans une ſituation verticale en A, le rayon viſuel des pinules du diametre rencontre le ſommet C de la montagne, parce qu'alors l'angle CAD ſera droit: ainſi AC ſera tangente *. * N°. 175.

On aura alors $CB \times CE = \overline{CA}^2$: & diviſant chacun de ces termes par CE qui eſt connu, on aura $CB = \frac{\overline{CA}^2}{CE}$, qui veut dire que le quarré de la tangente CA, diviſé par la hauteur CE de la montagne, eſt égal à la ſecante CB: Retranchant enſuite de cette ſecante la hauteur CE, il reſtera le diametre de la terre, c'eſt-à-dire BE. Cette opération ſuppoſe que la terre ſoit ſenſiblement ronde; & cette figure réſulte auſſi des différentes opérations qui ont été faites pour la découvrir.

PROBLEMES.

I.

806. *Trois lignes étant données A, B & O, leur trouver une quatriéme proportionnelle.* Pl. 3. Fig. 3.

mais il n'en eſt pas de même du bruit que fait le coup. Suivant des expériences faites par M. *Caſſini de Thury* de l'Académie des Sciences, il réſulte que le ſon ou le bruit d'un canon, fait dans un tems calme 173 toiſes par ſeconde, c'eſt-à dire, dans la ſoixantiéme partie d'une minute d'heure, ce qui eſt à peu près l'intervalle d'un batement de poux à un autre; ainſi ſuppoſant que l'on ait une montre à ſecondes, on comptera le nombre qui s'en écoulera depuis la lumiere vûe en A, juſqu'à ce que le bruit du canon ſoit parvenu en C; alors comptant 173 toiſes pour chaque ſeconde, on aura aſſez exactement la longueur de CA; on peut ſe ſervir au lieu de canon des boetes en uſage dans les feux d'artifice. Les expériences ont fait connoître que le ſon plus ou moins fort ſe tranſmet avec la même vîteſſe, c'eſt-à dire, qu'il fait toujours le même chemin dans un tems égal.

RESOLUTION.

Tirez deux lignes indéfinies C I, C H qui faſſent un angle quelconque I C H.

Portez ſur C H de C en D, la ligne A, & de D en F, la ligne B : portez la ligne O ſur C I de C en E, & tirez D E ; menez par F la ligne F G parallele à D E qui coupera C I en G : E G ſera la quatriéme proportionnelle aux trois lignes A, B, O, c'eſt-à-dire, que A . B : : O . E G.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que par la conſtruction, les deux côtés C F & C G du triangle C F G ſont coupés par la ligne D E parallele à la baſe F G de ce triangle, & qu'ainſi ils le ſont proportionnellement * : Donc A . B : : O . E G : Donc A × E G = B × O *.

* N°. 781.
* N. 660.

II.

Pl. 3. Fig. 4. 807. *Trouver une troiſiéme proportionnelle à deux lignes données A & B.*

RESOLUTION.

On fera comme dans le problême précedent un angle quelconque H C I.

Du ſommet C, on portera ſur C I de C en D, la ligne A : & de D en F la ligne B ; on portera la même ligne B ſur C H, ſçavoir de C en E : l'on tirera D E ; enſuite on menera par F, F G parallele à D E, & l'on aura O ou E G, la troiſiéme proportionnelle demandée ; enſorte que A . B : : B . O . ou C A . D F : : C E ou D F . E G.

La démonſtration eſt la même que celle du problême précedent.

III.

808. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données A & B.*

RESOLUTION.

Tirez une ligne droite indéfinie C E, sur laquelle prenez C D = A & D E = B; coupez ensuite C E en deux également en F; de ce point pris pour centre & du rayon F C ou F E, décrivez une demi-circonference sur C E; élevez au point D, la perpendiculaire D G jusqu'à la rencontre de la demi-circonference en G: elle sera la moyenne proportionnelle demandée entre A & B, c'est-à-dire, qu'on aura A ou C D. D G :: D G. B ou D E. Pl. 3. Fig. 5.

La démonstration est évidente par la proprieté du cercle *. * N. 798.

IV.

809. *Un parallelogramme étant donné, en faire un autre qui lui soit égal, & qui ait pour hauteur une ligne donnée H.*

Soit le parallélogramme A B C D, dont la base est A B & la hauteur D E; il faut en faire un autre qui lui soit égal en superficie, & qui ait pour hauteur la ligne donnée H. Fig. 6.

RESOLUTION.

Trouvez une quatriéme proportionnelle par le premier Problême de cet article, à la ligne H, à A B & à D E; elle sera la base du parallelogramme égal au proposé, & qui aura la hauteur H.

DEMONSTRATION.

Soit cette quatriéme proportionnelle G, l'on aura

par la conſtruction H. AB :: DE. G; d'où l'on aura avec le produit des extrêmes & celui des moyens
* N°. 660. $H \times G = AB \times DE$*: Donc, &c.

REMARQUE.

810. Par ce problême on peut, lorſque l'on a differens parallelogrammes, leur donner à tous la même hauteur; après quoi il eſt aiſé, en joignant leurs baſes de ſuite ſur la même ligne, de faire un ſeul parallélogramme qui les contienne tous: Car il eſt évident que celui qui aura pour baſe la ſomme de toutes ces baſes, & pour hauteur la hauteur commune, ſera égal à tous ces parallelogrammes.

V.

811. *Faire un quarré égal à un parallelogramme quelconque.*

Pl. 3. Fig. 7. Soit le parallelogramme ABCD dont la baſe eſt AB & la hauteur DE, qu'on veut changer en quarré.

RESOLUTION.

Il faut trouver, par le troiſiéme Problême de cet article, une moyenne proportionnelle GH entre la baſe AB, & la hauteur DE du parallelogramme AC; & le quarré X fait ſur cet moyenne proportionnelle ſera égal au parallelogramme ABCD.

DEMONSTRATION.

Par la conſtruction, AB, GH :: GH. DE: Donc $AB \times DE$, c'eſt-à-dire le parallelogramme propoſé,
* N°. 664. eſt égal à $GH \times GH$*, c'eſt-à-dire au quarré X. C. q. f. d.

REMARQUE.

812. On voit par ce problême & le précedent qu'il

n'y a point de polygone qui ne puiſſe être réduit au quarré, ainſi qu'on l'a déja dit.

Car tout polygone peut être réduit à un ſeul triangle *, & ce triangle peut être changé en parallelogramme *: Or, on peut réduire tout parallelogramme en quarré par le dernier problême : Donc, &c. * N°. 478. * N°. 433.

VI.

813. *Couper une ligne en moyenne & extrême raiſon.*

DEFINITION.

814. On dit qu'une ligne eſt coupée en *moyenne & extrême raiſon* lorſqu'elle eſt coupée en deux parties, de maniere que la ligne entiere eſt à ſa plus grande partie, comme cette même partie eſt à la plus petite.

Ainſi la ligne A B ſera coupée en moyenne & extrême raiſon en C, ſi l'on a AB. AC :: AC. CB. Le préſent problême conſiſte à couper une ligne de cette maniere. Pl. 3. Fig. 8.

RESOLUTION.

Elevez au point B la perpendiculaire BD égale à la moitié de A B. Du point D, pris pour centre, & du rayon D B, décrivez le cercle X qui touchera A B au point B *; tirez A D qu'il faut prolonger juſqu'en E. * N°. 175.

Prenez après cela A F, & portez cette grandeur de A en C : A B ſera coupée en moyenne & extrême raiſon au point C, c'eſt-à-dire, que l'on aura A B. AC :: AC. CB.

DEMONSTRATION.

La ligne A B étant tangente au cercle X, & A E,

une ſecante, l'on a AE. AB :: AB. AF ou AC qui
* N°. 801. lui eſt égal *; & en diviſant AE——AB. AB :: AB
* N°. 664. ——AC. AC *.

Or, le rayon BD étant égal à la moitié de AB, FE diametre du cercle X=AB; ainſi AE——AB =AE——FE qui eſt AF ou AC; AB——AC=CB: Ainſi mettant AC à la place de AE——AB dans la précedente proportion, & CB à la place de AB—— AC, elle devient AC. AB :: CB. AC qui donne en
* N°. 681. renverſant, AB. AC :: AC. CB *. C. q. f. d.

COROLLAIRE.

815. Il ſuit de ce problême que $AB \times CB = \overline{AC}^2$, c'eſt-à-dire, que le rectangle de la ligne entiere AB par ſa plus petite partie CB eſt égal au
* N°. 664. quarré de la plus grande AC *.

III.

De l'inſcription géometrique dans le cercle du Décagone, du Pentagone, & du Quindécagone ou Polygone de quinze côtés.

816. ON n'a pû donner l'inſcription géometrique de ces polygones dans le cercle, lorſque l'on a donné la méthode d'y inſcrire les autres; parce qu'elle dépend des principes qu'on vient d'établir par les triangles ſemblables. Ces principes étant actuellement connus, c'eſt ici le lieu de les appliquer à l'inſcription de ces polygones. On auroit pû donner plûtôt l'opération de cette inſcription, mais comme il auroit fallu en retarder la démonſ-

trarion, il a paru plus convenable de donner l'une & l'autre en même-tems.

THEOREME I.

817. *Si l'on a un triangle iſoſcelle A C B, dont les angles de la baſe A & B ſoient doubles de l'angle du ſommet C, & que l'on coupe en deux également l'un des angles A de la baſe par la ligne A D prolongée juſqu'au côté C B oppoſé à cet angle; ce côté ſera coupé en moyenne & extrême raiſon au point D, c'eſt-à-dire, qu'on aura C B. C D :: C D. D B.* Pl. 3. Fig. 9.

DEMONSTRATION.

Le triangle A B D eſt ſemblable au triangle total A C B; car l'angle D A B du premier, qui par la conſtruction, eſt la moitié de l'angle de la baſe C A B du ſecond, eſt égal à l'angle C du même triangle, qui eſt également la moitié du même angle. L'angle B eſt commun aux deux triangles: Donc le troiſiéme du premier A D B eſt égal au troiſiéme C A B du ſecond: Donc ces deux triangles ſont ſemblables *. * N°. 773.

Comparant enſemble leurs côtés homologues, l'on aura C B, dans le triangle A C B oppoſé à l'angle total A, eſt à A B dans le ſecond, oppoſé à l'angle A D B, comme A B oppoſé à l'angle C dans le grand triangle, eſt à B D, oppoſé à D A B dans le petit; c'eſt-à-dire que, C B. A B :: A B. B D.

Il faut conſiderer préſentement que dans le triangle A D C, l'angle C étant égal à l'angle C A D, ce triangle eſt iſoſcelle, & qu'ainſi A D = C D = A B. à cauſe de l'iſoſcelle D A B*: Mettant donc C D dans la proportion précedente à la place de A B, elle deviendra C B. C D :: C D. D B: Donc C B eſt cou- * Nº. 233.

pée en moyenne & extrême raiſon au point D par la ligne A D qui coupe l'angle C A B en deux également *. C. q. f. d.

* N°. 814.

COROLLAIRES.

I.

Il ſuit de cette propoſition,

Pl. 3. Fig. 9. 818. 1°. Que pour faire un triangle iſoſcelle qui ait pour ſes côtés égaux une ligne donnée C B, & dont les angles de la baſe ſoient doubles de l'angle du ſommet, il faut, pour trouver la baſe de ce triangle, diviſer la ligne C B en moyenne & extrême raiſon. Si on ſuppoſe que l'on ait C D pour la plus grande partie de cette ligne ainſi coupée, C D ſera la baſe cherchée; enſorte que ſi du point B, pris pour centre, & de l'intervalle C D on décrit un arc indéfini, & de C, pris auſſi pour centre, & de l'intervalle C B, on décrit un ſecond arc qui coupe le premier en A, tirant les lignes B A & C A, on aura le triangle A C B qui aura les conditions demandées.

REMARQUE.

819. La démonſtration de ce Corollaire eſt évidente par la précedente propoſition; mais ſi l'on en veut une particuliere, c'eſt-à-dire, démontrer que par cette conſtruction le triangle iſoſcelle C A B a ſes angles de la baſe doubles de celui du ſommet,

Fig. 10. Il faut prolonger C A vers E; faire A E = A B, tirer A D & E B. Conſiderer enſuite que par la conſtruction précedente on a A E = A B = A D = C D, & que l'on a auſſi C B (ou C A). A E (ou C D) :: C D. D B. ou C A. A E :: C D. D B.

D'où il ſuit, que puiſque les deux côtés C A & C B du triangle E C B ſont coupés proportionnellement

par A D, cette ligne eſt parallele à E B * : Donc l'angle extérieur C A D eſt égal à ſon oppoſé intérieur A E B * ; mais à cauſe des paralleles A D & E B l'angle D A B eſt égal à ſon alterne A B E * , qui eſt auſſi égal à l'angle E, parce que E A B eſt iſoſcelle * : Donc l'angle C A B eſt coupé en deux parties égales par A D, & comme C A = C B, l'angle B = C A B ; mais à cauſe du triangle iſoſcelle A C D, l'angle C = C A D qui eſt la moitié de l'angle de la baſe C A B : Donc, &c.

* N°. 783.
* N°. 153.
* N°. 157.

Deuxie'me Corollaire.

Il ſuit encore de la même propoſition précedente,

820. 2°. *Que la baſe A B du triangle iſoſcelle C A B eſt le côté du décagone inſcrit dans le cercle qui auroit pour rayon C A ou C B.* Pl. 4. Fig. 1.

Car comme l'angle C eſt la moitié de chacun des angles de la baſe du triangle C A B ; ſi on ſuppoſe que cet angle C ait pour meſure une certaine partie de la circonference du cercle ; les angles A & B auront le double de cette partie : Ainſi les trois angles du triangle C A B vaudront enſemble cinq parties égales de la circonference du cercle ; mais ces cinq parties valent la demi-circonference entiere, puiſque les trois angles de ce triangle valent deux angles droits ou 180 degrés * : Donc l'angle C vaut la cinquiéme partie de la demi-circonference, ou la dixiéme de la circonference entiere : Donc A B eſt la corde de la dixiéme partie de la circonference : Donc elle eſt le côté du decagone *.

* N°. 224.
* N° 344.

D'où il ſuit ,

821. *Que pour inſcrire un Décagone dans un cercle,*

Il faut couper le rayon du cercle en moyenne & extrême raiſon, porter ſa plus grande partie ſur la circonference du même cercle, & qu'elle la diviſera en 10 parties égales.

Car la plus grande partie de ce rayon coupé en moyenne & extrême raiſon étant la baſe d'un triangle iſoſcelle, dont les angles de la baſe ſont doubles de celui du ſommet *; & cette baſe la corde de la dixiéme partie de la circonference *: Donc, &c.

*N°. 817.
*N°. 820.

REMARQUE.

822. Cette même propoſition du N°. 817. peut auſſi ſervir à inſcrire le pentagone dans le cercle.

Pl. 4. Fig. 2. Soit le cercle X dans lequel on a inſcrit un décagone; il eſt évident que pour y inſcrire un pentagone il faut tirer une corde B C qui comprenne deux arcs A B & A C du décagone; car cette ligne B C ſera la corde de la cinquiéme partie de la circonference: Donc elle la diviſera en cinq parties égales: Donc, &c.

823. La propoſition qui ſuit n'a pour objet que l'inſcription du pentagone régulier dans le cercle, & comme cette inſcription ſe fait très-aiſément par la précedente, on pourra paſſer cette nouvelle propoſition & le problème qui la ſuit, ſi on y trouve quelques difficultés. On ne préſume cependant pas qu'on y en trouve aucune, pourvû qu'on ſe ſoit un peu familiariſé avec les triangles ſemblables, & qu'on ſe ſoit appliqué à diſtinguer leurs côtés homologues, ou ceux qui ſont oppoſés aux angles égaux.

THEOREME II.

824. *Si l'on a un pentagone & un décagone réguliers inſcrits dans un cercle, le quarré du côté du pentagone ſera égal à celui du côté du décagone, plus au quarré du rayon du même cercle.*

Soit le cercle X dans lequel A B eſt le côté du pentagone A D, ou D B celui du décagone, & C A ou C B le rayon; il faut démontrer que $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2$. Pl. 4. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Tirez de C ſur A D la perpendiculaire C F qui coupera A B en E, & de ce point, tirez en D la ligne E D qui ſera égale à A E; parce que le centre C étant également diſtant de A & de D, & C F étant perpendiculaire ſur A D, elle a tous ſes points également diſtans de A & de D *: Donc le point E, qui eſt un des points de C F, en eſt auſſi également diſtant: Donc E D = A E: prolongez C F en H, elle coupera l'arc A D en deux également *. * N°. 123. * N°. 139.

Préſentement le triangle A E D eſt ſemblable au triangle A D B; car comme ils ſont chacun iſoſcelles, & que l'angle D A B eſt commun à l'un & à l'autre; le ſecond angle A D E de la baſe du premier eſt égal au ſecond angle B de la baſe du triangle A D B: Donc ils ont deux angles égaux, chacun à chacun: ainſi ils ſont ſemblables *. * N°. 774.

Comparant leurs côtés homologues, l'on aura, A B baſe du grand triangle, eſt à A D baſe du petit, comme le même A D oppoſé à l'angle B dans le grand, eſt à A E oppoſé à l'angle A D E dans le petit, lequel angle eſt égal à B. On a donc par la comparaiſon des côtés homologues de ces deux triangles, A B . A D :: A D . A E: D'où l'on tire avec le produit des extrêmes, & celui des moyens, $AB \times AE = \overline{AD}^2$ *. * N°. 664.

Il faut conſiderer à préſent que le triangle A C B eſt ſemblable au triangle E C B.

L'angle A C B étant l'angle du centre du penta-

gone vaut la cinquiéme partie de la circonference
*N°. 336. entiere, c'eſt-à-dire, de 360 degrés qui eſt 72. * Les deux autres angles CAB & ABC du triangle ACB valent donc enſemble 108 degrés, puiſque les trois
*N°. 224. angles de tout triangles en valent 180 *; mais ces deux angles ſont égaux entr'eux à cauſe de l'égalité
*N°. 230. des côtés CA & CB *: Donc ils valent chacun la moitié de 108 degrés, qui eſt 54. Il reſte à faire voir que l'angle ECB eſt auſſi de 54 degrés; car alors le triangle CEB ayant deux angles égaux, chacun à chacun aux deux angles CAB & CBA du triangle
*N. 774. ACB, il lui ſera ſemblable *.

Conſiderez que l'arc HB qui meſure l'angle FCB eſt les trois quarts de l'arc ADB de 72 degrés, c'eſt-à-dire, qu'il eſt de 54; car DB eſt la moitié de ADB étant l'arc qui ſoutient le côté du décagone; HD eſt la moitié de l'autre moitié AD du même arc ADB, c'eſt-à-dire le quart; la moitié DB en vaut deux quarts: Donc HB eſt les trois quarts de cet arc: Mais les trois quarts de 72 ſont 54; puiſque la moitié de 72 eſt 36, & la moitié de 36 eſt 18: Or $36+18=54$: Donc l'angle ECB eſt égal à l'angle EBC de même qu'à l'angle CAB: Donc, &c.

Si l'on compare à préſent les côtés homologues des deux triangles ſemblables ABC & CBE, l'on aura, AB oppoſé à l'angle ACB de 72 degrés dans le premier triangle eſt à CB oppoſé à l'angle CEB dans le ſecond, auſſi de 72 degrés, comme le même côté CB oppoſé à l'angle CAB de 54 degrés dans le premier triangle, eſt au côté BE dans le ſecond, oppoſé à l'angle ECB, qui eſt auſſi de 54 degrés, c'eſt-à-dire, que AB. CB :: CB. BE, d'où l'on tire avec le produit des extrêmes & celui des moyens $AB \times \overline{BE}^{2} = CB$ *.

*N°. 664.

Ajoutant à $AB \times BE$, le produit de $AB \times AE$ qu'on a eu par la comparaiſon des deux premiers triangles, & à $\overline{CB}^2$, qui eſt égal au premier produit, $\overline{AD}^2$ qui eſt égal au ſecond, on aura par le ſecond axiôme *, $AB \times BE + AB \times AE = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$: Or, on a vû que le quarré d'une ligne étoit égal aux rectangles de cette ligne & de ſes parties * ; BE & AE ſont les deux parties de AB : Donc $AB \times BE + AB \times AE = \overline{AB}^2$.

* N. 121.

* N°. 459, p. 344.

Ainſi mettant AB à la place de ces deux rectangles ou de ces deux produits dans l'expreſſion précedente, l'on aura $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$; mais $\overline{AB}^2$ eſt le quarré du côté AB du pentagone, $\overline{CB}^2$ celui du rayon CB & $\overline{AD}^2$, celui du côté AD du décagone : Donc le quarré du côté du pentagone eſt égal à celui du rayon dans lequel ce polygone eſt inſcrit, plus à celui du côté du décagone. C. q. f. d.

PREMIER PROBLEME.

825. *Inſcrire un pentagone régulier dans un cercle donné Y.*

RESOLUTION.

Tirez le diametre AB, & menez le rayon CE perpendiculaire à AB. Coupez CB en deux également en D ; puis du point D, pris pour centre, & de l'intervalle DE, décrivez l'arc EF ; tirez la corde de cet arc, c'eſt-à-dire FE, elle ſera le côté du pentagone inſcrit dans le cercle Y.

Pl. 4. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que par la conſtruction, le rayon CE eſt coupé en moyenne & extrême raiſon, & que ſa plus grande partie eſt FC; car ſi du point D, pris pour centre, & du rayon DC ou DB, on décrit un cercle CGBC, & qu'on tire ED, on verra qu'on a fait tout ce qui a été preſcrit N. 813. pour couper la ligne EC en moyenne & extrême raiſon, & que EG eſt la plus grande partie du rayon ainſi coupé: Or, FC = EG, puiſque ED = FD, & que ôtant de ces deux lignes égales, les deux parties DG & DC égales, les reſtes ſont égaux: Donc FC eſt la plus grande partie du rayon du cercle Y coupé en moyenne & extrême raiſon: Donc elle eſt le côté du décagone inſcrit dans le même cercle *: Mais à cauſe du triangle rectangle FCE, $\overline{EF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CE}^2$ *: Ainſi comme FC eſt le côté du décagone, & que CE eſt le rayon du cercle, il s'enſuit que le quarré de EF eſt égal au quarré du côté du décagone, plus à celui du rayon du cercle Y: Donc EF eſt le côté du pentagone, puiſque par la propoſition précedente le quarré du côté du pentagone vaut ces deux autres quarrés. C. q. f. d.

* N°. 821.

* N°. 460 & 797.

SECOND PROBLEME.

826. *Inſcrire dans un cercle un quindécagone ou un polygone régulier de quinze côtés.*

Soit le cercle X dans lequel on veut inſcrire ce polygone.

RESOLUTION.

Fl. 4. Fig. 5. On commencera par y inſcrire un pentagone ABCDE par le Problême précedent; enſuite des

extrémités A & D de deux côtés quelconques EA & ED qui font un angle AED du pentagone, il faut porter ſur la circonference du cercle le rayon LA, ſçavoir, de A en F & de D en G; tirez GF, elle ſera le côté du quindécagone.

DEMONSTRATION.

L'angle du centre du polygone de 15 côtés eſt de 24 degrés, étant la quinziéme partie de la circonference qui vaut 360 degrés *: Or 360, diviſé par 15, donne 24: Donc pour démontrer que FG eſt le côté du quindécagone, il ſuffit de faire voir que l'arc dont il eſt la corde, eſt de cette quantité de degrés: Mais à cauſe du pentagone inſcrit, l'arc AE eſt de 72 degrés, & parce que le rayon a été porté de A en F, l'arc AF eſt de 60: Donc FE eſt de 12 degrés. Par la même raiſon EG eſt auſſi de 12 degrés: Donc l'arc entier FG eſt de vingt-quatre degrés: Donc la corde de cet arc eſt le côté du quindécagone. C. q. f. d.

* N°. 344.

THEOREME III.

827. *Si dans un pentagone régulier X on tire des lignes, comme CA, BD, &c. qui joignent enſemble deux de ſes côtés, elles ſeront égales.* Pl. 4. Fig. 6.

Cette propoſition eſt évidente, car ces lignes font avec les deux côtés du pentagone qu'elles ſoutiennent des triangles, comme ABC, BCD qui ont deux côtés égaux, & les angles compris par ces côtés auſſi égaux, étant angles de la circonference du pentagone: Donc ces triangles ſont égaux *: Donc BD =AC. C. q. f. d.

* N°. 245.

828. Les lignes, comme AC, BD qui ſoutiennent deux côtés du pentagone, ſont appellées *ſes diagonales.*

THEOREME IV.

Pl. 4. Fig. 6. 829. *Si dans un pentagone régulier X on tire deux diagonales qui ſe coupent, comme A C, B D, la plus grande partie A E ou E D de ces lignes, ſera égale au côté du pentagone.*

Il eſt évident que pour démontrer cette propoſition, il faut ſeulement faire voir que le triangle A B E ou E C D eſt iſoſcelle, ou que l'angle A B E eſt égal à A E B, parce qu'alors on aura auſſi A B = A E *.

* N°. 233.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que l'angle A B D qui s'appuye ſur deux arcs qui ſoutiennent chacun un côté du pentagone, a pour meſure l'un de ces arcs *; que l'angle A E B qui a ſon ſommet dans le cercle, a pour meſure la moitié de l'arc C D, plus la moitié de l'arc A B *, c'eſt-à-dire, comme ces deux arcs ſont égaux, qu'il a auſſi pour meſure un des arcs que ſoutient le côté du pentagone : Donc ces deux angles ſont égaux: Donc A B = A E. C. q. f. d.

* N°. 197.

* N°. 206.

THEOREME V.

Fig. 6. 830. *Les diagonales A C, B D du pentagone régulier X qui ſe coupent en E, ſe coupent en moyenne & extrême raiſon.*

Pour le prouver, conſiderez que les triangles A B C, B E C ſont ſemblables; car l'angle B A C du premier a pour meſure la moitié de l'arc B C que ſoutient un des côtés du pentagone *: L'angle E B C du ſecond a auſſi pour meſure la moitié de l'arc C D que ſoutient le côté C D du pentagone; il en eſt de même

* N°. 197.

même de l'angle BCE ou BCA qui eſt commun à l'un & à l'autre : Donc AC. BC :: BC. EC : Mais par la propoſition précedente AE égale BC. C'eſt pourquoi mettant dans la proportion ci-deſſus AE à la place de BC, l'on aura AC. AE :: AE. EC : Donc AC eſt coupée en moyenne & extrême raiſon en E*. C. q. f. d. * N. 814.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

831. *Que le côté BC du pentagone régulier X, eſt égal à la plus grande partie de ſa diagonale AC coupée en moyenne & extrême raiſon.*

IV.

Des Figures ſemblables, du Rapport de leurs circonférences & de leurs ſuperficies.

832. ON appelle *figures ſemblables* celles qui ont le même nombre de côtés qui font entre-eux des angles égaux, comparés chacun à chacun dans chaque figure, & qui ont les côtés homologues proportionnels.

Les côtés *homologues* ſont dans ces figures, comme dans les triangles, les côtés oppoſés aux angles égaux.

REMARQUE.

833. On a vû dans l'article des triangles ſemblables, que de l'égalité de leurs angles il s'enſuivoit la proportionalité de leurs côtés homologues : ce n'eſt pas la même choſe dans les autres figures, elles peu-

vent avoir leurs angles égaux ſans que leurs côtés ſoient proportionnels ; c'eſt pourquoi on a ajouté à l'égalité des angles la condition de la proportionalité des côtés, pour que les figures ſoient ſemblables.

THEOREME I.

834. *Les polygones ſemblables, réguliers ou irréguliers, ſont compoſés de même nombre de triangles ſemblables.*

Pl. 4. Fig. 7. Cette propoſition eſt évidente à l'égard des polygones réguliers ſemblables.

Car ſoient, par exemple, les deux éxagones réguliers X & Y. Si des centres C & *c* on tire les rayons obliques de ces polygones, ils ſeront chacun partagés en autant de triangles égaux qu'ils ont de côtés *, leſquels ſeront ſemblables dans chaque polygone, puiſque les angles du centre A C B, *a c b* ſont égaux, étant chacun la ſixiéme partie de la circonference, ou de 360 degrés ; que de plus les angles de la circonference de ces polygones ſont auſſi égaux entr'eux, & qu'ainſi les angles de la baſe des triangles A C B, *a c b*, qui ſont la moitié d'angles égaux, ſont égaux : Donc, &c.

* N. 334.

DEMONSTRATION pour les Polygones irréguliers.

Fig. 8. Pour démontrer la même propoſition dans les polygones irréguliers, ſoient les deux exagones irréguliers ſemblables A B C D E F A, *a b c d e f a* ; ils ont, par la définition des polygones ſemblables, les angles égaux, chacun à chacun, & les côtés homologues proportionnels ; il faut démontrer que de-là il s'enſuit qu'ils ſont compoſés de même nombre de triangles ſemblables.

Pour cela, considerez que ces deux polygones peuvent être partagés par des lignes tirées d'un de leurs angles D & *d* en autant de triangles qu'ils ont de côtés, moins deux, c'est-à-dire, dans cet exemple, chacun en 4. DCB, *dcb*, &c.*; que le triangle DCB du premier polygone est semblable au triangle *dcb* du second, parce que les deux côtés CD & CB du premier sont proportionnels aux deux côtés *cd*, *cb* du second, & que les angles C & *c* sont égaux: Donc ces deux triangles sont semblables*: Donc CB. *cb*:: CD. *cd*:: DB. *db*.

* N°. 355.

* N°. 791.

Considerez aussi que par la même raison le triangle BDA du premier polygone est semblable au triangle *bda* du second; car les deux côtés BD, BA du premier sont proportionnels aux deux côtés *bd* & *ba* du second, & de plus les angles DBA, *dba* sont égaux, parce que l'angle CBA étant égal à l'angle total *cba*, & l'angle CBD aussi égal à *cbd*, à cause des triangles semblables CBD, *cbd*; ôtant des deux premiers angles, les deux seconds, les restes DBA & *dba* seront égaux: Donc le triangle DBA est semblable au triangle *dba* dans le second polygone*.

* N°. 791.

On démontrera de la même maniere que les deux autres triangles ADF, FDE du premier polygone sont semblables aux deux derniers correspondans dans le second: Donc les polygones semblables se partagent en même nombre de triangles semblables. C. q. f. d.

THEOREME II.

835. *Si l'on a des polygones réguliers ou irréguliers, composés de même nombre de triangles semblables, ils seront semblables.*

DEMONSTRATION.

Cette propoſition eſt la converſe de la précedente, & elle peut ſe démontrer encore plus aiſément que ſa directe.

Car ſi l'on conſidere que par la ſuppoſition tous les triangles qui compoſent les polygones propoſés ſont ſemblables, tous les côtés de ces polygones ſeront proportionnels, & les angles que ces côtés feront enſemble, ſeront auſſi égaux chacun à chacun dans chaque polygone: Donc par la définition des polygones ſemblables, ils ſeront ſemblables. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

836. Il ſuit de cette propoſition, que tous les polygones réguliers de même nombre de côtés ſont ſemblables; car il eſt évident qu'ils ſont compoſés de même nombre de triangles ſemblables.

II.

837. Que les cercles qui peuvent être conſiderés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés, c'eſt-à-dire, de même nombre *, ſont auſſi des figures ou des polygones ſemblables, de même que les ſecteurs de même nombre de degrés, &c.

* N°. 354.

DEFINITION.

838. On appelle *lignes ſemblablement tirées* dans les polygones réguliers de même nombre de côtés, les rayons droits, les obliques, &c. Dans les cercles ce ſont les rayons, les diametres, les cordes qui ſoutiennent des arcs égaux, les arcs de même nombre de dégrés, &c. & dans les polygones irréguliers ſem-

blables, ce ſont les lignes qui coupent les côtés homologues ou les angles de ces polygones de la même maniere. En géneral ce ſont dans toutes ces eſpeces de polygones des lignes tirées avec les mêmes circonſtances, tant à l'égard des angles que des côtés des polygones.

THEOREME III.

839. *Dans tous les polygones ſemblables, les lignes ſemblablement tirées, ſont proportionnelles entr'elles & aux côtés homologues des polygones.*

On fera trois parties de cette propoſition.

On la démontrera

1°. Dans les polygones réguliers, 2°. dans les cercles, & 3°. dans les polygones irréguliers.

DEMONSTRATION de la premiere partie pour les polygones réguliers.

840. Soient les deux polygones réguliers X & Y, dont les centres ſont C & *c*. Pl. 4. Fig. 7.

Il faut démontrer que les rayons droits C D, *c d* de ces polygones ſont proportionnels aux rayons obliques C A, *c a*, & aux côtés homologues A B & *a b* des mêmes polygones.

Les triangles C A D, *c a d* ſont ſemblables; car ils ont chacun un angle droit C D A, *c d a*; & ils ont les angles C A D, *c a d* égaux, parce qu'ils ſont chacun la moitié des angles de la circonférence des polygones X & Y: Donc ils ſont ſemblables *: Donc C A . *c a* :: C D . *c d* :: A D . *a d*; mais A D & *a d* ſont les moitiés des côtés A B, *a b*: Donc* ils ſont en même raiſon que ces côtés: Ainſi C A . *c a* :: C D . *c d* :: A B . *a b*. C. q. f. d. * N°. 774. * N°. 319

Seconde partie pour les cercles.

Pl. 4. Fig. 9. 841. Soient les cercles V & Z, dont les centres ſont C & *c*, & dans leſquels les cordes A B, *a b* ſoutiennent des arcs égaux, de même que les cordes A D & *a d*. Il faut démontrer que A B. *ab* :: A D. *a d*.

Pour cela, tirez les cordes D B & *db*, & conſiderez que les triangles A D B, *adb* ſont ſemblables, parce que les angles D A B, D B A du premier ſont égaux aux angles *d ab* & *db a* du ſecond, puiſque par la ſuppoſition ils s'appuyent ſur des arcs de même nombre de degrés * : Donc A B. *ab* :: A D. *a d* :: D B. *db*.

* N°. 199.

Si l'on tire les rayons C A, C B & *c a*, *c b* dans les deux mêmes cercles, on aura les triangles A C B, *a c b* ſemblables, parce qu'ils ſont iſoſcelles, & qu'à cauſe de l'égalité des arcs A D B, *adb*, les angles A C B, *a c b* ſont égaux * : Ainſi les deux angles C A B, A B C du premier ſont égaux aux deux *c a b* & *a b c* du ſecond : Donc C A. *ca* :: A B. *ab* : Donc les rayons des cercles ſont en même raiſon que les cordes des arcs de même nombre de degrés. C. q. f. d.

* N°. 96.

842. Pour démontrer auſſi que *les arcs de même nombre de degrés D B*, d b *ſont comme les rayons & les cordes qui les ſoutiennent*,

Prenez les parties B E, *b e* des circonferences des cercles Y & Z ſi petites, qu'elles puiſſent être conſiderées comme des lignes droites, & de maniere qu'elles ſoient des parties ſemblables de ces circonferences, comme par exemple, la milliéme partie de chacune. Alors tirant les rayons C B, C E, *c b*, *c e*, l'on aura les triangles iſoſcelles B C E, *b c e* qui ſeront ſemblables à cauſe de l'égalité des angles B C E, *b c e* : Ainſi B E. *be* :: C B. *c b*, c'eſt-à-dire, que les

petits arcs BE & *be* ſont entr'eux comme les rayons BC & *bc*; mais les arcs DB & *db* de même quantité de degrés ſont auſſi des parties ſemblables des circonferences de V & de Z : Donc ils ſont en même raiſon que les petites parties ſemblables BE & *be* des mêmes circonferences *, & par conſequent ils ſont auſſi entr'eux comme les rayons de ces cercles, & comme leurs cordes qui ſont auſſi proportionnelles aux rayons : Donc, &c.

* N°. 622.

REMARQUE.

843. Il faut obſerver que les arcs ne ſont en même raiſon que leurs cordes, que dans des cercles differens; car dans le même, les arcs ne ſont pas proportionnels aux cordes.

Pour le prouver, ſoit le cercle T dans lequel AB eſt la corde d'un arc quelconque ACB. Si l'on coupe cet arc en deux également en C, & qu'on tire les cor- AC, CB, ſi les cordes étoient en même raiſon que les arcs, les deux cordes AC & CB ſeroient, priſes enſemble, égales à la corde AB; mais elles ſont plus grandes que cette corde, puiſqu'elles font une ligne courbée ACB plus grande que la droite AB : Donc elles ne ſont pas la moitié de cette corde : Donc, &c.

Pl. 4. Fig. 10.

Troiſiéme partie pour les polygones irréguliers.

844. Il s'agit de démontrer dans cette troiſiéme partie que *les lignes ſemblablement tirées dans les polygones irréguliers ſont proportionnelles entr'elles, & aux côtés homologues de ces polygones.*

Soient les polygones irréguliers ſemblables ABC DEA, *abcdea*, dans leſquels on a tiré les lignes AD, *ad*, qui joignent les extrémités des côtés homologues EA, ED, & *ea*, *ed*; il faut démontrer que AD. *ad* :: AE. *ae*.

Pl. 5. Fig. 1.

Pour cela, conſiderez que les deux triangles A E D, *a e d* ayant les deux côtés E A, E D & *e a*, *e d* proportionnels, par la ſuppoſition que les polygones ſont ſemblables, & de plus les angles E & *e* égaux, il s'enſuit qu'ils ſont ſemblables * : Donc A D, *a d* : : A E. *a e*.

* N°. 791.

Si l'on tire les lignes D F, *d f* dans les mêmes polygones leſquelles coupent proportionnellement ou de la même maniere les deux côtés homologues A B, *a b*, elles ſeront auſſi proportionnelles entr'elles, & aux côtés homologues des polygones, c'eſt-à-dire, qu'on aura D F. *d f* : : A B. *a b*.

Pour le prouver, conſiderez que A B, & *a b* étant coupées proportionnellement en F & *f*, les parties A F & *a f* ſont les parties ſemblables de ces côtés, & qu'ainſi elles ſont entr'elles comme ces côtés * : Or, on vient de voir que A D & *a d* ſont en même raiſon que les côtés homologues des deux polygones propoſés : d'où il ſuit, que les deux côtés A D, A F du triangle D A F ſont proportionnels aux côtés *a d*, *a f* du triangle *d a f* : Les angles en A & *a* de ces triangles ſont auſſi égaux, parce que les polygones étant ſemblables, l'angle total E A F eſt égal à *e a f*, & que les triangles E A D, *e a d* étant auſſi ſemblables, les angles E A D, *e a d* ſont égaux : Donc en retranchant ces deux derniers angles des deux premiers, les reſtes D A F, *d a f* ſont égaux : Donc les triangles D A F, *d a f* ſont ſemblables * : Donc D F. *d f* : : A F. *a f* ou comme A B eſt à *a b*, ces deux dernieres étant en même raiſon que A F & *a f* : Donc, &c.

* N°. 623.

* N°. 791.

Il eſt évident que l'on démontrera de la même maniere que toutes les autres lignes ſemblablement tirées dans ces polygones ſont proportionnelles entr'elles & aux côtés des polygones : &c.

THEOREME IV.

845. *Les circonférences des figures ſemblables ſont entr'elles comme leurs côtés homologues ou leurs lignes ſemblablement tirées.*

Soient les deux polygones ſemblables X & Y, il faut démontrer que la circonference du premier ou la ſomme de ſes côtés A B, B C, &c. eſt à la circonference du ſecond, ou à la ſomme de tous ſes côtés *a b*, *b c*, &c. comme un côté quelconque A B du premier eſt au côté homologue *a b* du ſecond, ou comme A D eſt à *a d* qui ſont des lignes ſemblablement tirées dans ces deux polygones. Pl. 5. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que par la définition des polygones ſemblables leurs côtés homologues ſont proportionnels, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont des rapports égaux, étant comparés les uns aux autres : Or, lorſque l'on a pluſieurs rapports égaux, la ſomme des antécedens eſt à celle des conſequens, comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſequent *. D'où il ſuit, que prenant les côtés du premier polygone X pour les antécedens, & ceux du ſecond Y pour les conſequens, la ſomme des côtés de X ſera à celle de Y, comme A B eſt à *a b*. Mais les côtés homologues A B & *a b* ſont entr'eux comme les lignes ſemblablement tirées A D & *a d* *: Donc les circonferences des polygones ſemblables ſont entr'elles comme leurs côtés homologues, ou leurs lignes ſemblablement tirées. C. q. f. d. * N° 628. *N°. 839.

PREMIER COROLLAIRE.

846. Il ſuit de cette propoſition, *que les circonférences des polygones réguliers ſont entr'elles comme leurs*

côtés homologues, ou comme leurs rayons droits ou obliques.

DEUXIÉME COROLLAIRE.

847. *Que les circonférences des cercles ſont entr'elles comme leurs rayons ou leurs diametres, ou comme les arcs de même nombre de degrés, ou comme les cordes de ces arcs.*

Car les cercles pouvant être conſiderés comme
* N°. 354. des polygones réguliers d'une infinité de côtés *, tout ce qu'on a démontré à l'égard des polygones réguliers convient également aux cercles.

REMARQUES.

I.

848. Ce Corollaire pouvoit ſe tirer auſſi de l'article du N°. 842. dans lequel on a prouvé que les arcs de même nombre de degrés ſont en même raiſon que les rayons des cercles, & les cordes qui les ſoutiennent.

Car ces arcs étant des parties ſemblables de leurs Touts, qui ſont les circonferences des cercles, & les Touts étant en même raiſon que leurs parties ſem-
* N°. 622. blables *; il s'enſuit que les circonferences ſont entr'elles comme les arcs de même nombre de degrés, & par conſequent comme leurs rayons qui ſont en même raiſon que ces arcs, & enfin comme les diametres des cercles qui étant doubles des rayons ſont auſſi entr'eux comme les rayons.

II.

849. On a dit N°. 444 & 445. que le diametre étoit à ſa circonference à peu près comme 7 eſt à 22, ou comme 113 eſt à 355; d'où l'on a donné le

moyen de trouver la circonference d'un cercle dont on connoît le diametre, & réciproquement de trouver ſon diametre par la connoiſſance de ſa circonference : Mais il faut obſerver que le raiſonnement ſur lequel on a établi la pratique de trouver ainſi la circonference ou le diametre d'un cercle, n'eſt pas une démonſtration exacte & rigoureuſe de cette pratique. Cette démonſtration dépend du principe que l'on vient d'établir ; ſçavoir, *que les circonferences des cercles ſont entr'elles comme leurs diametres.*

Car il ſuit de ce principe, que ſi l'on a un cercle dont le diametre ait ſept parties égales quelconques, & ſa circonference 22 des mêmes parties, que pour trouver la circonference d'un autre cercle dont le diametre ſera connu, ces circonferences étant entr'elles comme les deux diametres, on trouvera celle du propoſé, en diſant, *comme le diametre du premier, qui eſt 7, eſt à ſa circonference 22 : ainſi le diametre du ſecond qui eſt, par exemple 40 ; eſt à ſa circonference ;* c'eſt-à-dire, qu'on trouvera cette circonference en faiſant une Regle de Trois, dont les deux premiers termes ſont 7 & 22, & le troiſiéme le diametre du cercle propoſé, le tout ainſi qu'il eſt expliqué N°. 447. & ſuivant.

III.

C'eſt ici le lieu de démontrer l'inſcription des polygones dans le cercle, par le moyen du compas de proportion.

850. *Démonſtration de l'uſage du compas de proportion pour l'inſcription des polygones dans le cercle.*

Par la conſtruction de cet inſtrument, la diſtance du centre A au nombre 6 de la ligne des polygones, eſt égale au rayon du cercle qui a ſervi à évaluer les

Pl. 5. Fig. 2.

differens côtés des polygones marqués ſur le compas de proportion.

Ceci ſuppoſé, ſoit un cercle X dans lequel on veut inſcrire, par exemple, un pentagone.

On prend le rayon BC de ce cercle avec le compas ordinaire, & on ouvre le compas de proportion de maniere que l'intervalle du nombre 6 au nombre 6 de la ligne des polygones, ſoit égal à BC; le compas de proportion reſtant dans cette ouverture, la diſtance du nombre 5 au même nombre des deux lignes des polygones donne le côté du pentagone inſcrit dans le cercle X; c'eſt ce qu'il s'agit de démontrer.

Soient D & E les points 5 & 5 de la ligne des polygones, & B & C les points 6 & 6 de la même ligne, & ſoient tirées DE & BC, les triangles ADE, ABC ſont ſemblables à cauſe des paralleles BC & DE; c'eſt pourquoi AB. AD::BC. DE* : Or AB eſt le rayon du cercle qui a ſervi à évaluer les côtés des polygones ſur le compas de proportion, & AD le côté du pentagone de ce cercle; BC eſt le rayon du cercle X : Donc DE eſt le côté du pentagone du même cercle *.

*N°. 784.

*N°. 839.

Cette même démonſtration peut s'appliquer à tous les autres polygones.

DEFINITION.

851. On appelle *produiſans* dans les figures, les lignes qui étant multipliées enſemble en donnent le produit. Ainſi les produiſans des triangles & des parallelogrammes ſont les baſes & les hauteurs; ceux des polygones réguliers & des cercles, les rayons & les circonferences, &c.

THEOREME V.

852. *Dans les figures ſemblables, les produiſans ſont proportionnels aux côtés homologues de ces figures.*

On pourroit regarder cette propoſition comme une ſuite de celle du N°. 839. dans laquelle on a démontré que les lignes ſemblablement tirées étoient proportionnelles aux côtés homologues; car les produiſans ſont des lignes ſemblablement tirées; mais on va démontrer cette même verité indépendemment de cette propoſition.

Soient d'abord les triangles ſemblables A C B, *a c b* dont les baſes ſont A B & *a b*, & les hauteurs C D & *c d*, il faut démontrer que les produiſans A B & C D du premier ſont proportionnels aux produiſans *a b* & *c d* du ſecond, & aux côtés homologues, ou que A B . *a b* : : C D . *c d*. Pl. 5. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les triangles A C B, *a c b* étant ſemblables, par la ſuppoſition, les triangles A C D & *a c d* le ſont auſſi; car l'angle A du premier eſt égal à l'angle *a* du ſecond, & l'angle A D C eſt droit de même que *a d c*: Donc ces deux triangles ſont ſemblables *: Donc A C . *a c* : : C D . *c d* *; mais à cauſe que les triangles A C B, *a c b* ſont ſemblables, leurs côtés homologues ſont proportionnels * : Ainſi A B . *a b* : : A C . *c d*: Or, deux rapports égaux à un même rapport ſont égaux entr'eux *: Donc celui de C D à *c d* eſt égal à celui de A B à *a b* : Donc A B . *a b* : : C D . *c d*. C. q. f. d.

* N°. 774.
* N°. 784.
* N°. 784.
* N°. 616.

On démontrera de la même maniere que ſi l'on a des parallelogrammes ſemblables X & Y, les produi- Pl. 5. Fig. 4.

ſans A & B du premier ſeront proportionnels aux produiſans *a* & *b* du ſecond.

Pl. 5. Fig. 5. Que ſi l'on a deux polygones réguliers ſemblables T & Y, leurs produiſans ſeront auſſi proportionnels; car les produiſans de ces figures ſont les circonfe-
* N° 439. rences & les rayons droits *; mais ces grandeurs ſont
* N°. 845. proportionnelles *: Donc, &c.

Il en eſt de même pour les cercles, dont les pro-
* N°. 440. duiſans ſont les rayons & les circonferences *.

A l'égard des polygones irréguliers, comme ils ſe partagent en même nombre de triangles ſembla-
* N°. 834. bles *, les produiſans de tous ces triangles ſeront proportionnels entr'eux, & aux côtés homologues des polygones, comme on vient de le démontrer; mais la ſomme des produits de ces produiſans donne la ſuperficie de ces polygones; par conſequent les produiſans des triangles, dont les polygones ſont compoſés, ſont auſſi les produiſans de ces polygones: Donc les produiſans de toutes les figures ſemblables ſont proportionnels entr'eux & aux côtés homologues de ces figures. C. q. f. d.

THEOREME VI.

853. *Les ſuperficies des figures ſoit régulieres ou irrégulieres ſont entr'elles en raiſon compoſée de leurs produiſans, ou comme les produits de leurs produiſans.*

Cette propoſition peut être regardée comme évidente; car ſi les figures ſont des triangles, des polygones réguliers ou des cercles, elles ſont égales à la moitié du produit de leurs produiſans; mais comme les moitiés ſont en même raiſon que leurs Touts: Donc, &c.

Si elles ſont des rectangles ou des parallelogrammes, elles ſont égales aux produits des produiſans;

enfin si ce sont des figures irrégulieres, elles sont aussi comme les sommes des produits des produisans des differens triangles dont elles sont composées : Or, les produits des produisans donnent la raison composée des mêmes produisans * : Donc toutes les figures sont entr'elles en raison composée de leurs produisans, ou comme les produits de leurs produisans.

* Nos. 629 & 631.

THEOREME VII.

854. *Les figures qui ont des produisans égaux, & d'autres inégaux, sont entr'elles comme les inégaux.*

DEMONSTRATION.

Lorsque l'on multiplie des quantités differentes par d'autres quantités égales, on n'en change point leur rapport * : Donc en multipliant les produisans inégaux par les égaux, on ne change pas le rapport des inégaux ; mais on a après cela la superficie des figures : Donc ces figures sont comme les produisans inégaux. C. q. f. d.

* N°. 624

THEOREME VIII.

855. *Les figures dont les produisans sont réciproques, sont égales.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux parallelogrammes X & Z, dont les deux produisans AB & CD du premier sont réciproques aux deux produisans *ab* & *cd* du second, l'on aura AB. *ab* :: *cd*. CD * : Or, AB × CD = *ab* × *cd* * : Donc, &c.

Pl. 5. Fig. 6.

* N° 662.

* N°. 660.

REMARQUE.

856. Il est évident que cette démonstration peut

s'appliquer à toute autre figure ; car dès que les produiſans ſeront réciproques, ceux de la premiere figure ſeront les termes extrêmes d'une proportion dont ceux de la ſeconde ſeront les moyens * ; mais dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens * : Donc, &c.

* N°. 662.

* N°. 660.

THEOREME IX.

857. *Les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs produiſans, ou de leurs côtés homologues.*

DEMONSTRATION.

Les figures ſemblables ont leurs produiſans proportionnels entr'eux & aux côtés homologues des figures *, & elles ſont égales au produit de ces produiſans : Or, lorſque l'on a quatre grandeurs proportionnelles le produit des deux antécedens eſt à celui des deux conſequens, comme le quarré d'un antécedent eſt à celui de ſon conſequent * : Donc ſi l'on prend pour antécedens les deux produiſans de la premiere figure, & pour conſequens ceux de la ſeconde, le produit des deux produiſans de la premiere, c'eſt-à-dire, ſa ſuperficie, ſera au produit des deux produiſans de la ſeconde, c'eſt-à-dire à la ſeconde, comme le quarré d'un produiſant de la premiere eſt au quarré du produiſant correſpondant de la ſeconde ; mais les côtés homologues des figures ſemblables étant en même raiſon que leurs produiſans, leurs quarrés ſeront auſſi en même raiſon que ceux de ces produiſans * : Donc les figures ſemblables qui ont le même rapport que les quarrés de leurs produiſans, ſont auſſi entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. C. q. f. d.

* N°. 852.

* N°. 691.

* N. 689.

AUTRE

AUTRE DEMONSTRATION.

Les produiſans des figures ſemblables ſont proportionnels * ; ainſi leurs produits qui ſont compoſés de deux raiſons égales, ſont en raiſon doublée des produiſans * , ou ce qui eſt la même choſe , comme le quarré des produiſans * ; mais les produiſans ſont proportionnels aux côtés homologues : Donc les quarrés de ces côtés ſont proportionnels aux quarrés des produiſans : Donc les figures ſemblables qui ſont comme les quarrés des produiſans, ſont auſſi entr'elles comme les quarrés des côtés homologues. C. q. f. d.

* N° 842.
* N° 631.
* N°. 641.

THÉOREME X.

853. *Les figures ſemblables ſont auſſi entr'elles comme les quarrés de leurs lignes ſemblablement tirées.*

Cette propoſition peut être regardée comme un Corollaire de la précedente ; car les lignes ſemblablement tirées dans les figures ſemblables étant proportionnelles aux côtés homologues *, & lorſque pluſieurs grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrés & leurs cubes l'étant auſſi *; il s'enſuit que puiſque les figures ſemblables ſont comme les quarrés de leurs côtés homologues * , elles ſont auſſi comme les quarrés des lignes ſemblablement tirées dans ces figures. D'où il ſuit ,

* N°. 839.
* N°. 689.
* N°. 857.

PREMIER COROLLAIRE.

859. *Que les ſuperficies des polygones réguliers , qui ſont comme les quarrés des côtés homologues , ſont auſſi comme les quarrés de leurs rayons droits ou obliques.*

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

860. Que les cercles, qui peuvent être conſiderés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés *, *ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres.*

* N°. 314.

861. Ainſi un polygone dont le côté eſt double du côté homologue d'un autre polygone ſemblable, eſt quadruple de ce ſecond polygone; car ils ſont entr'eux comme le quarré de 2 qui eſt 4, eſt au quarré de 1 qui eſt 1 : Or 4 eſt quadruple de 1 : Donc, &c.

862. Il ſuit de-là, que ſi dans la place d'armes d'une Ville, on peut mettre, par exemple, deux mille hommes en bataille, dans une autre place d'armes ſemblable, dont les côtés ſeront doubles de ceux de la premiere place, on pourra mettre en bataille quatre fois plus d'hommes que dans la premiere, c'eſt-à-dire 8000, ce ſecond quarré étant quadruple du premier : Ainſi, ſi le quarré d'une ligne quelconque $\overline{AB}^2$ eſt exprimé par $\overline{AB}^2$, celui d'une ligne double de AB, qui ſera quadruple de celui de cette ligne, ſera exprimé par $4\overline{AB}^2$; ce qu'il faut bien remarquer. Il en ſera de même du rapport de deux Villes, dont l'enceinte formera des polygones ſemblables; c'eſt-à-dire, que leur ſuperficie ſeront entr'elles comme les quarrés des côtés homologues de l'enceinte de ces Villes.

873. Il ſuit de-là, qu'un cercle dont le rayon eſt double du rayon d'un autre cercle, contient quatre fois plus de ſuperficie, quoique ſa circonference ne ſoit que le double de celle de ce cercle; car les ſuperficies qui ſont comme les quarrés des rayons,

ſont entr'elles comme 4 eſt à 1, & les circonferences qui ſont comme les rayons, ſont entr'elles comme 2 eſt à 1.

REMARQUE.

864. On a déja donné differentes démonſtrations de l'égalité du quarré de l'hypotenuſe d'un triangle rectangle à ceux de ſes deux autres côtés *. On peut encore démontrer cette même verité d'une maniere fort ſimple, à l'aide des deux propoſitions précedentes. * N. 450 & 794

Soit le triangle rectangle A C B : ſi du ſommet C de ſon angle droit on abbaiſſe une perpendiculaire C D ſur l'hypotenuſe, elle le partagera en deux triangles A C D, C D B ſemblables entr'eux, & au total A C B *; les trois triangles étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues *, & par conſéquent de leurs hypotenuſes qui ſont les trois côtés de A C B : Donc ils ſont entr'eux comme les quarrés des trois côtés de A C B, & réciproquement les quarrés des trois côtés de ce triangle, ſont entr'eux comme les trois triangles A C B, A C D, C D B : Donc puiſque les deux triangles A C D, C D B, ſont égaux au total A C B, les quarrés faits ſur leurs hypotenuſes doivent être égaux au quarré fait ſur l'hypotenuſe A B du triangle total : Donc, &c. Pl. 5. Fig 7. * N°. 793. * N°. 857.

THEOREME XI.

865. *Si ſur les trois côtés d'un triangle rectangle, on décrit des figures ſemblables, celle qui ſera décrite ſur l'hypotenuſe ſera égale aux deux autres décrites ſur les deux côtés de l'angle droit du triangle.*

Soit le triangle rectangle B A C, ſur chaque côté Fig. 8.

duquel on a décrit, par exemple, un demi-cercle, il faut démontrer que le demi-cercle V, qui a pour diametre l'hypotenuſe AC, eſt égal aux deux autres X & Z décrits ſur les deux autres côtés du même triangle.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que par la proprieté du triangle rectangle, le quarré de BC eſt égal aux quarrés des deux autres côtés *; que de plus les trois demi-cercles V, X & Z étant des figures ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, c'eſt-à-dire, comme les quarrés des trois côtés du triangle ABC *: Donc puiſque le quarré de BC vaut les deux autres AB & AC, le demi-cercle V qui a pour diametre BC eſt égal aux deux autres X & Z, qui ont pour diametre les deux autres côtés du triangle ABC. C. q. f. d.

* N. 794 & 864.

* Nº. 860.

$\overline{\quad}^2$ $\overline{\quad}^2$

THEOREME XII.

Pl. 5. Fig. 9.

866. *Si ſur l'hypotenuſe AB d'un triangle rectangle ACB, priſe pour diametre, on décrit un demi-cercle, ſa circonference paſſera par le ſommet C de l'angle droit de ce triangle.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que ſi le point C étoit dans le cercle comme en *d*, l'angle A*d*B ſeroit plus grand que ACB *, & qu'il ſeroit plus petit s'il étoit en dehors du cercle comme en *f* *: Donc dans l'un & l'autre cas il ne ſeroit pas droit : Donc puiſqu'il eſt droit, & qu'il s'appuye ſur le diametre AB, il faut que ſon ſommet *c* ſe rencontre ſur la circonference du demi-cercle, dont AB eſt le diametre *. C. q. f. d.

* Nº. 206.

* Nº. 205.

* Nº. 200.

THEOREME XIII.

867. *Si l'on décrit un demi-cercle ſur l'hypotenuſe d'un triangle rectangle A C B, & deux autres demi-cercles ſur chacun de ſes deux autres côtés, pris pour diametres, les parties X & Y de ces demi-cercles, hors le demi-cercle A C B, ſont égales, priſes enſemble, au triangle A C B.* Pl. 5. Fig. 10.

DEMONSTRATION.

Le demi-cercle A C B eſt égal aux deux autres A E C, C D B qui ont pour diametres les côtés C A & C B *; Or, ils ont de commun avec le 1er demi-cercle les deux ſegmens ombrés; c'eſt pourquoi en les retranchant de ce demi-cercle, & des deux petits qui lui ſont égaux, le reſte du premier ſera égal aux reſtes des derniers *; mais le reſte du premier eſt le triangle A C B, & ceux des ſeconds ſont les figures curvilignes X & Y : Donc ces deux figures ſont égales, priſes enſemble, au triangle A C B. C. q. f. d. * N°. 865. * N. 12.

REMARQUES.

I.

868. Si le triangle A C B eſt iſoſcelle, c'eſt-à-dire, ſi A C = C B, & que du point C on abbaiſſe ſur A B la perpendiculaire C G, qui coupera A B en deux également en G *, le triangle A C G ſera égal à la figure curviligne X, & C G B à l'autre Y; enſorte que meſurant chacun de ces triangles, on aura la ſuperficie des eſpaces curvilignes X & Y, c'eſt-à-dire, leur quadrature. * N°. 123.

869. Mais ſi les deux côtés C A, C B du triangle A C B ſont inégaux, quoique le triangle total A C B ſoit toujours égal aux deux figures curvilignes X & Fig. 11.

Y, on ne peut déterminer quelle eſt la partie qui eſt égale à l'une de ces deux figures.

II.

870. Les figures curvilignes X & Y, ſont appellées *Lunulles*; on les nomme ordinairement les *Lunulles d'Hippocrates*. C'eſt le nom d'un ancien Géometre qui a donné le premier la maniere de les quarrer, ou d'en trouver la ſuperficie.

THEOREME XIV.

871. *Le quarré du diametre du cercle eſt à ſa ſuperficie, comme le diametre eſt au quart de la circonférence.*

Pl. 5. Fig. 12. Soit le cercle X dont le diametre eſt AB, & le quarré de ce diametre ABDE : ſoit auſſi le triangle CBF égal à la ſuperficie du cercle, c'eſt-à-dire, dont la baſe BF eſt égale à la circonference du cercle, & qui a pour hauteur le rayon CB.; * il faut démontrer que le quarré de AB, c'eſt-à-dire, ABDE eſt au triangle CBF, qui eſt égal au cercle X, comme le diametre AB eſt au quart de BF.

* N°. 438.

DEMONSTRATION.

Coupez BF en deux également en G, & menez GH parallele à AB, & égale au rayon BC; tirez CH le rectangle BH, ayant pour baſe BG moitié de BF, & pour hauteur CB, c'eſt-à-dire, la même que CBF, ſera égal au triangle CBF *.

* N°. 433.

Coupez ſa baſe BG en deux également en I, & menez IM parallele à AB qui coupera CH en L, & qui ſera terminée en M par le prolongement de EA. Alors le rectangle BM ſera évidemment égal à BH, puiſqu'ayant le double de hauteur de ce rectangle

il n'a que la moitié de ſa baſe, c'eſt-à-dire, puiſque ſes deux produiſans ſont réciproques à ceux de BH * : Donc BM, qui eſt égal à BH, & par conſequent au triangle CBF, eſt auſſi égal au cercle X, auquel ce triangle eſt égal. * N°. 855.

Conſiderez préſentement que le quarré ABDE, & le rectangle BM, ayant chacun pour hauteur le diametre AB=MI, ſont entr'eux comme leurs baſes *, c'eſt-à-dire, comme DB eſt à BI, ou comme AB (qui eſt égal à DB à cauſe du quarré AD) eſt au quart de la ligne BF, ou de la circonference de X, à laquelle BF eſt ſuppoſée égale. C. q. f. d. * N. 777.

REMARQUES.

I.

872. On auroit pû démontrer cette propoſition plus ſimplement de cette maniere.

Nommant *a* le diametre du cercle X, & *c* ſa circonference, le quarré de ce diametre auroit été exprimé par *a a*, & la ſuperficie du cercle qui eſt égale au produit de la circonference par le quart du diametre, auroit été $\frac{ac}{4}$, c'eſt-à-dire, le quart du produit de la circonference entiere par le diametre : Alors ces deux produits *a a* & $\frac{ac}{4}$ ayant des produiſans égaux, ſçavoir *a* & *a*, ſont comme leurs inégaux *, c'eſt-à-dire, comme *a* eſt à $\frac{c}{4}$, ou comme le diametre *a* eſt au quart de la circonference *c*. * N°. 854.

II.

873. On a vû N. 444, que ſuivant *Archimede* le diametre eſt à la circonference du cercle, comme 7

est à 22. Si l'on multiplie les deux termes de ce rapport par 2, il sera exprimé par 14 & 44*, & alors suivant la proposition précedente, le quarré du diametre d'un cercle sera à sa superficie, comme 14 est 11, qui est le quart de 44.

* N°. 624.

Si l'on se sert du rapport d'*Adrien Metius*, qui est celui de 113 à 355, il faudra pour pouvoir prendre le quart de 355 qui exprime la circonference, multiplier par 4 les deux termes de ce rapport: il sera alors exprimé par 452 & 1420, & l'on aura le rapport du diametre du cercle au quart de la circonference, exprimé par celui de 452 à 355, qui est plus exact que le précedent.

THEOREME XV.

874. *Si l'on a trois lignes en proportion continue, & que l'on construise deux figures semblables quelconques, qui ayent pour côtés homologues les deux premieres lignes, la premiere figure sera à la seconde, comme la premiere ligne est à la troisiéme.*

Pl. 6. Fig. 1. Soient les trois lignes en proportion continue, A, B & C, il faut démontrer que la figure qui a pour côté A, par exemple, le quarré D, est au quarré E qui a B pour côté homologue, comme A est à C.

DEMONSTRATION.

Considerez que les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues A & B*, & qu'à cause de la proportion continue A. C :: A. B. c'est-à-dire, que A est à C, comme le quarré de A est au quarré de B*: Donc puisque le rapport de A à C est égal à celui des quarrés des côtés homologues, les figures D & E qui sont comme

* N°. 857.

—2 —2

* N°. 694.

les quarrés de ces côtés, ſont auſſi entr'elles comme A eſt à C. C. q. f. d.

PREMIER PROBLEME.

875. *Faire un quarré qui en contienne un autre autant de fois que l'on voudra, par exemple trois.*

Soit le quarré donné A B C D, on veut en conſtruire un autre qui le contienne trois fois. Pl. 6. Fig. 25

RESOLUTION.

Faites une ligne droite H L égale à trois fois la ligne A B, & trouvez une moyenne proportionnelle F G entre A B & H L, ſon quarré ſera trois fois plus grand que le propoſé A B C D.

DEMONSTRATION.

F G étant moyenne proportionnelle entre A B & H L, l'on a A B. F G :: F G. H L; mais à cauſe que cette proportion eſt continue, l'on a * A B. H L :: $\overline{\text{AB}}^2$. $\overline{\text{FG}}^2$ A B. F G: Or H L eſt trois fois plus grande que A B : Donc le quarré de F G eſt auſſi trois fois plus grand que celui de A B. * N°. 694.

REMARQUES.

I.

876. On peut par le même problême trouver le côté d'un polygone quelconque, qui contienne autant de fois que l'on voudra un autre polygone ſemblable propoſé; car tous les polygones ſemblables étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ſi l'on prend une ligne qui ſoit à la premiere ce que l'on veut que la figure qu'on doit conſ-

truire ſoit à la propoſée, la moyenne proportionelle entre ces deux lignes donnera toujours le côté de la figure ſemblable demandée. Puiſque le quarré de la premiere ligne ſera à celui de cette moyenne, comme la premiere ligne eſt à la troiſiéme.

Pl. 6. Fig. 3. Soit, par exemple, le pentagone X, & qu'il faille en conſtruire un autre qui lui ſoit ſemblable, & qui ſoit deux fois plus grand.

On cherchera une moyenne proportionnelle H L entre A B & F G, qui eſt double de A B, & ſi l'on conſtruit ſur HL un polygone Y ſemblable à X, il ſera double de ce polygone. Ce qui eſt évident par la démonſtration du problême précedent.

Pour conſtruire ce polygone, ayant ainſi trouvé le côté H L, il faut partager le propoſé X en triangles par les lignes A C, A D, tirées d'un de ſes angles A aux autres angles C & D.

Enſuite, il faut tirer une ligne indéfinie *a b* = H L, & conſtruire ſur cette ligne un triangle *a b c* ſemblable à A B C, c'eſt-à-dire, faire les angles *c a b*, *c b a* égaux aux angles C A B, C B A, & tirer les lignes *a c*, *b c* qui ſe couperont en *c*, le triangle *a b c* ſera ſemblable à A B C *. On fera après cela ſur *a c* les angles *d a c*, *d c a* égaux aux angles D A C, D C A de X, & prolongeant les côtés *a d* & *c d*, juſqu'à ce qu'ils ſe coupent en *d*, on aura le triangle *a d c* ſemblable à A D C de X. On fera de même le triangle *a e d* ſemblable à A E D, & l'on aura le polygone Y, qui ſera ſemblable à X, étant compoſé de même nombre de triangles ſemblables.

* N°. 773.

* N. 834.

On pourra appliquer cet exemple à la conſtruction des figures ſemblables d'un plus grand nombre de côtés. On obſervera ſeulement que ſi les polygones ſont réguliers, la conſtruction en deviendra plus facile; car ayant trouvé le côté homologue *a b* de ce-

lui qu'on veut conſtruire, on fera à ſes extrémités des angles égaux à la moitié des angles de la circonférence du polygone propoſé. Les côtés de ces angles étant prolongés ſe couperont dans un point qui donnera le centre du polygone demandé, & la conſtruction s'achevera comme dans le problême du N. 378.

II.

Si on vouloit un polygone ſemblable à un autre donné, & qui n'en fût qu'une partie, comme le tiers ou le quart, &c. il faudroit trouver une moyenne proportionnelle entre le côté du polygone propoſé, & le tiers ou le quart, &c. de ce côté; alors cette moyenne proportionnelle ſeroit le côté d'un polygone ſemblable au propoſé, & qui n'en ſeroit que le tiers ou le quart, &c. Ce qui eſt évident par la démonſtration précedente.

877. Une figure quelconque, comme *f g h i k* étant donnée, on peut encore en conſtruire une autre qui lui ſoit ſemblable, & qui ait M N pour côté homologue à *f g* de cette maniere. Pl. 6. Fig. 4.

On prolongera *f g* en G, enſorte que *f* G ſoit égale à M N; on tirera du point *f* les lignes *f h*, *f i*, *f k* prolongées indéfiniment au-delà de *h*, *i* & *k*; on menera G H parallele à *g h*, qui coupera *f h* en H. Par ce point H, on menera H I parallele à *h i*, qui coupera *f i* en I, & enfin par I, on décrira auſſi I L parallele à *i k* qui coupera *f k* en L, & l'on aura la figure G H I L *f* ſemblable à la propoſée *f g h i k f*; ce qui eſt évident, ces deux figures étant compoſées de même nombre de triangles ſemblables.

Si le côté donné M N étoit plus petit que *f g*, on conſtruiroit de la même maniere la figure ſemblable à la propoſée, en menant des paralleles en dedans le premier polygone ou la premiere figure,

terminées par les diagonales de cette figure, &c.

SECOND PROBLEME.

Pl. 6. Fig. 3. 878. *Deux polygones ſemblables X & Y étant propoſés, trouver quel eſt leur rapport.*

RESOLUTION.

Cherchez une troiſiéme proportionnelle aux deux côtés homologues A B & *a b* de ces polygones; le premier X ſera au ſecond Y, comme A B ſera à la troiſiéme proportionnelle. La démonſtration eſt la même que celle du premier problême N. 875.

Réſolution des problêmes précedens avec le compas de proportion.

879. Les problêmes précedens peuvent ſe réſoudre aiſément avec le compas de proportion.

On trouve ſur chacune des branches de cet inſtrument une ligne appellée *ligne des plans*, ſous laquelle eſt écrit les *plans*. Elle eſt ordinairement diviſée en 64 parties, dont la premiere commence au centre du compas.

La ligne des plans eſt diviſée ſuivant la progreſſion des racines quarrées des nombres 1, 2, 3, 4, &c. c'eſt-à-dire, que la premiere diviſion, depuis le centre du compas juſqu'au point 1, eſt le côté d'un quarré qui eſt la moitié de celui qui a pour côté la diſtance du centre du compas de proportion au point 2, le tiers de celui qui a pour côté l'intervalle du même centre au point 3, & ainſi de ſuite.

La longueur de la branche du compas de proportion étant déterminée comme de 6, 4 ou 3 pouces, pour diviſer la ligne des plans, on ſuppoſe qu'elle contient un grand nombre de parties égales, comme

1000 ; on quarre ce nombre en le multipliant par lui-même, & l'on extrait la racine quarrée de ſa moitié. Cette racine eſt le côté d'un quarré une fois plus petit que celui qui a pour côté la ligne entiere des plans. Si on extrait la racine quarrée de la cinquiéme partie, on a le côté d'un quarré cinq fois plus petit, &c. C'eſt de cette maniere qu'on trouve, ou qu'on peut trouver les 64 diviſions de la ligne des plans, dont la derniere eſt le côté d'un quarré 64 fois plus grand que celui qui a pour côté la premiere.

On ſuppoſe la ligne des plans, diviſée d'abord en un grand nombre de parties égales, afin de pouvoir négliger, ſans erreur ſenſible, le reſte des racines qu'on eſt obligé d'extraire, & qui ne ſe trouvent pas exactement.

Il y a d'autres manieres de diviſer la ligne des plans ; mais il n'eſt queſtion ici que de donner une idée de ſa conſtruction pour en faire connoître l'uſage plus aiſément.

Ceci poſé, pour faire, par exemple, un cercle qui ſoit à un autre dans tel rapport qu'on voudra, comme cinq fois plus grand, ou comme 5 eſt à 1 :

Soit le cercle donné X, dont le rayon eſt AB : Pour en faire un autre cinq fois plus grand, on portera le rayon AB ſur les mêmes diviſions de chaque ligne des plans CH & CG ; mais de maniere que ces diviſions ſoient exactement les cinquiémes parties d'autres diviſions, comme ſur 10 & 10 qui ſont la cinquiéme partie de 50. Pl. 6. Fig. 5

Le compas de proportion étant ainſi ouvert, enſorte que la diſtance de 10 à 10 des deux lignes des plans ſoit égale au rayon AB, on prendra l'intervalle DE de 50 à 50, qui ſera le rayon d'un cercle Y, cinq fois plus grand que le donné X.

DEMONSTRATION.

Conſiderez qu'à cauſe des triangles ſemblables CAB, CDE, CA. CD :: AB. DE. * ces quatre lignes étant proportionnelles, leurs quarrés le ſeront auſſi * : Mais par la conſtruction de la ligne des plans le quarré qui a pour côté C A eſt la cinquiéme partie de celui qui a pour côté C D, dont le quarré de A B eſt auſſi la cinquiéme partie de celui de D E : Mais les cercles ſont entr'eux comme le quarré de leurs rayons * : Donc le cercle qui a pour rayon D E eſt cinq fois plus grand que celui qui a pour rayon A B. C. q. f. d.

* N°. 784.

* N°. 689.

* N°. 860.

Il eſt évident qu'on peut faire de cette maniere, avec la ligne des plans, des figures ſemblables qui ſoient entr'elles dans tel rapport qu'on voudra.

Pl. 6. Fig. 3. Pour trouver préſentement le rapport de deux figures ſemblables quelconques, comme par exemple, celui des deux pentagones ſemblables X & Y, dont les côtés homologues ſont A B & *a b*,

On ouvrira le compas de proportion à volonté, & l'on prendra avec le compas ordinaire le côté A B du polygone X, qu'on ſuppoſe le plus petit : on le portera de part & d'autre ſur la même diviſion de chaque ligne des plans. Suppoſons qu'il réponde au point 10 & 10 des deux lignes des plans.

On prendra enſuite la ligne *a b*, & le compas de proportion gardant la même ouverture précedente, on portera cette ligne ſur les deux lignes des plans, de maniere que ſes extrémités tombent ſur les mêmes diviſions de chacune de ces lignes. Suppoſons que ce ſoit ſur 30 & 30, on aura alors le polygone X au polygone Y, comme 10 eſt à 30, ou comme 1 eſt à 3.

Car les quarrés des côtés homologues A B & *a b*

ſont entr'eux comme 1 eſt à 3 par la conſtruction de la ligne des plans : Mais les deux pentagones X & Y ſont dans la même raiſon que ces quarrés : Donc, &c.

TROISIE'ME PROBLEME.

880. *Deux figures rectilignes A & B étant données, en conſtruire une troiſiéme, égale à la ſeconde, & ſemblable à la premiere A.* Pl. 6. Fig. 6.

RESOLUTION.

Faites d'abord le rectangle C F égal au triangle A, en donnant à ce rectangle la même baſe que A, & la moitié de ſa hauteur *. Changez B en rectangle D F K G qui ait même hauteur que C F *. Et ſur C G, priſe pour diametre, décrivez un demi-cercle ; prolongez la perpendiculaire F D juſqu'à la circonference en L ; ſi ſur D L on conſtruit un triangle L D M ſemblable à A, il ſera égal à la figure rectiligne B.

* N°. 432.

* N°. 459 p. 294. 1er vol. & N. 809.

DEMONSTRATION.

Les trois lignes C D, D L & D G ſont en proportion continue* ; Ainſi C D . D G :: C D^2 . D L^2 * : Mais C D & D L ſont les côtés homologues des deux triangles ſemblables A & L D M : Donc ces deux triangles ſont auſſi entr'eux comme C D^2 eſt à D L^2, ou comme C D eſt à D G : Or, les rectangles C F & D K qui ont même hauteur D F, ſont entr'eux comme leurs baſes, ou comme C D eſt à D G *. Ce qui fait voir que ces deux rectangles ſont

* N°. 798.

* N°. 694.

* N°. 780.

entr'eux comme les deux triangles A & L D M; Donc le triangle A eſt au rectangle C F, comme le triangle L D M eſt au rectangle D K. Mais le triangle A eſt égal par la conſtruction au rectangle C F: Donc le triangle L D M eſt égal auſſi au rectangle D K *, & par conſequent à la figure B, auquel ce rectangle eſt égal. C. q. f. d.

* N°. 687.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE IX.

I.

DES PLANS.

881. COMME les Solides ſont terminés par des ſurfaces qui ſe rencontrent de differentes manieres, il eſt néceſſaire de traiter des Plans en particulier, avant de paſſer à la conſidération des Solides.

882. Le *plan* eſt une ſuperficie plane indéfinie, ou dont on ne conſidere pas les bornes ou les extrémités.

883. Une ligne AB *eſt perpendiculaire à un plan* CDEF, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes du plan qui paſſent par le point A où elle touche le plan. Pl 7. Fig 1.

884. Une ligne GH *eſt oblique à un plan* LM, Fig. 2.

lorſqu'elle fait des angles inégaux H G K, H G I avec quelqu'unes des lignes K I qui paſſent par le point G où elle touche le plan.

885. Si de l'extrémité H de l'oblique H G, on abaiſſe une perpendiculaire H I ſur le plan L M, la ligne G I compriſe entre le point G de l'oblique, & le point I de la perpendiculaire H I, eſt appellée la *projection* de l'oblique H G.

Pl. 7. Fig. 3. 886. Lorſque deux plans A B, C D ſe coupent ou qu'ils ſe rencontrent, ils le font dans une ligne droite E F qui ſe nomme leur *commune ſection*.

887. La commune ſection de deux plans eſt toujours une ligne droite, parce que ſuivant la définition des ſuperficies planes, on peut tirer ſur elles des lignes droites de tout ſens. Ainſi toutes leurs parties ſont étendues en lignes droites : Donc elles ne peuvent ſe couper ou ſe rencontrer que dans des lignes droites.

Fig. 4 & 5. 888. *L'inclinaiſon de deux plans* X & Y eſt l'angle D E F qu'ils font en ſe rencontrant, ou ce qui eſt la même choſe, c'eſt celui que font enſemble les perpendiculaires A B & B C, élevées du point B de la commune ſection D E ſur chacun des plans X & Y.

Si cet angle A B C eſt droit, les plans X & Y ſe rencontrent perpendiculairement, ou ils ſont perpendiculaires l'un à l'autre, autrement ils ſe rencontrent obliquement, & la meſure de l'angle A B C donne celle de leur inclinaiſon.

Fig. 6. 889. Deux plans T & V ſont paralleles, lorſqu'ils ſont par tout également éloignés les uns des autres, ou lorſque les perpendiculaires A B, C D tirées d'un de ces plans à l'autre, ſont égales.

890. Un *angle plan* eſt un angle ordinaire, formé de deux lignes droites, qui ſe rencontrent ſur un plan.

891. Un *angle ſolide* eſt une partie d'un ſolide, qui ſe termine en pointe, & qui eſt formée de pluſieurs angles plans, dont les ſommets ſe réuniſſent dans un point qu'on appelle le ſommet de l'angle ſolide. Pl. 7. Fig. 7.

Tel eſt le coin d'un dez à jouer, d'une boëte quarrée, &c. Et tel eſt l'angle A, formé des trois angles plans B A C, C A D & D A B, qu'il faut ſuppoſer élevés ſur le plan, de maniere qu'ils faſſent une pointe en A.

892. Il ſuit de cette deſcription ou définition, que deux angles plans B A D, A B C ne peuvent faire un angle ſolide, & qu'il en faut au moins trois pour que le point A étant élevé, il ſoit entouré de tous côtés d'angles plans.

THEOREME I.

893. *Si une ligne droite A B a deux points A & B ſur un plan X, elle ſera entiérement ſur ce plan.*

Cette propoſition eſt évidente par la définition du plan, qui eſt une ſuperficie plane; car ſur cette ſuperficie on peut tirer des lignes droites de tous ſens: Donc on en peut tirer une de A en B; mais entre ces deux points A & B, on ne peut tirer qu'une ſeule ligne droite: Donc cette ligne eſt celle qui eſt tracée ſur le plan de A en B: Donc elle eſt entiérement ſur ce même plan: Donc, &c. Fig. 8.

THEOREME II.

894. *La poſition d'un plan dépend de celle de trois points qui ne ſont pas rangés en ligne droite.*

Soient les trois points donnés A, B & C, il faut démontrer qu'il ne peut paſſer qu'un ſeul plan par ces Fig. 9.

trois points, c'eſt-à-dire, qu'ils donnent la poſition du plan X, de la même maniere que deux points donnent celle d'une ligne droite.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne A B du point A au point B; & conſiderez que le plan pouvant être conçu décrit par le mouvement d'une ligne droite qui s'éloigne uniformement de ſa premiere poſition *, la ligne A B peut ainſi décrire des plans tout autour de ſa poſition A B; mais que ſi l'on donne le point C par où elle doive paſſer, qu'alors ſa direction eſt déterminée vers C: Donc la poſition du plan qu'elle décrit ſe trouve déterminée par ce point, & par les deux autres A & B qui donnent celle de la ligne A B: Donc, &c.

* N°. 41.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition,

895. *Que deux plans differens ne peuvent avoir 3 points de communs qui ne ſoient pas rangés en ligne droite.*

Car s'ils les avoient de communs, ils auroient la même poſition: Donc ils ſeroient couchés l'un ſur l'autre: Donc ils ne feroient qu'un ſeul & même plan.

THEOREME III.

896. *Si l'on a une partie A C d'une ligne droite A B, ſur un plan X, elle ſera toute entiere dans le même plan.*

Pl. 7. Fig. 10. Cette propoſition eſt évidente; car la poſition de la ligne droite étant déterminée par ſa partie qui eſt ſur le plan, elle s'étend dans le prolongement de cette partie: Mais le plan qui s'étend auſſi indéfiniment de tous côtés, s'étend donc ſuivant le prolongement de la partie A C: Donc, &c.

THEOREME IV.

897. *Deux lignes droites qui ſe rencontrent ou qui ſe coupent, ſont dans le même plan.*

Soient les deux lignes droites A C, C D qui ſe rencontrent dans le point C, il faut démontrer qu'elles ſont dans le même plan X, de même que leurs prolongemens C B, C E. Pl. 7. Fig. 11.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les trois points A, D & C déterminent la poſition du plan A C D *, & que les lignes A C & D C étant dans ce plan, leurs prolongemens C B & C E ſeront auſſi dans le même plan, par la propoſition précedente : Donc lorſque deux lignes ſe rencontrent, ou qu'elles ſe coupent, elles ſont dans le même plan. * N°. 894.

Il ſuit de-là,

898. 1°. Que les deux côtés d'un angle ſont toujours dans le même plan.

899. Et 2°. que les trois côtés d'un triangle ſont auſſi également dans le même plan.

Car ſoit le triangle A C B, ſes deux côtés C A & C B ſont dans le même plan *; mais A B qui a deux points A & B dans ce plan, y eſt auſſi entiérement *: Donc, &c. Fig. 12. * N. 897. * N°. 896.

THEOREME V.

900. *Si l'on a deux points C & D d'une ligne droite également éloignés de trois points A, B, E, d'un plan X, cette ligne ſera perpendiculaire au plan.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que la poſition du plan X dépend de Fig. 13.

trois points *, & celle de la ligne C D de deux points; que par la ſuppoſition les trois points du plan A, B & E, ſont également éloignés de C & de D : Donc tout le plan a la même poſition par rapport à ces deux points, & par conſéquent par rapport à tous les points de la ligne C D, qui eſt déterminée par les deux points C & D : Donc elle ne penchera vers aucun côté ſur les lignes du plan qui paſſeront par C : Donc, &c.

* N°. 894.

THEOREME VI.

901. *Si une ligne C D eſt perpendiculaire à deux lignes A C, C E qui ſe rencontrent ſur un plan X, elle ſera perpendiculaire au plan.*

DEMONSTRATION.

Pl. 7. Fig. 14. Prolongez les lignes A C & C E en B & en F, & faites C B, & C F = C A ou C E : Alors vous aurez les trois points B, F, A ou E, B, F également éloignés du point C. Le point D ſera auſſi également éloigné des trois mêmes points ; car les angles que D C fait avec A C & C E étant droits, ceux qu'elle fait avec les prolongemens de ces lignes le ſeront également : Donc ſi on tire du point D des lignes en A, en B & en F, elles ſeront égales, puiſque les éloignemens C A, C F & C B ſont ſuppoſés égaux * : Donc le point D ſera à égale diſtance des trois points B, F & A : Donc D C qui a deux points C & D également diſtans des trois points A, F & B du plan X eſt perpendiculaire à ce plan *. C. q. f. d.

* N°. 128.

* N. 900.

COROLLAIRE.

902. Il ſuit de cette propoſition, que lorſqu'une ligne droite C D eſt perpendiculaire à deux lignes qui ſe coupent ſur un plan, elle eſt auſſi perpendiculaire au même plan.

THEOREME VII.

903. *Si une ligne CD eſt perpendiculaire à trois lignes AC, CE & CB qui ſe rencontrent dans un même point AC, ces trois lignes ſont dans le même plan X.*

DEMONSTRATION.

Les deux lignes CA & CE qui ſe rencontrent dans le point A ſont dans le même plan ACE : CD eſt perpendiculaire à ces deux lignes : Donc elle eſt perpendiculaire au plan ACE, & par conſequent à toutes les lignes de ce plan qui paſſeront par C : Or, cette ligne eſt auſſi perpendiculaire à CB par la ſuppoſition : Donc CB eſt dans le plan des deux premieres, c'eſt-à-dire, dans le même plan X : Donc, &c. Pl. 7. Fig. 14.

THEOREME VIII.

904. *Les lignes perpendiculaires au même plan ſont paralleles.*

DEMONSTRATION.

Soient les lignes AB, CD perpendiculaires au plan X, pour démontrer qu'elles ſont paralleles, il ſuffit de conſiderer que par la définition des perpendiculaires à un plan, elles ne penchent vers aucun côté ſur le plan X * : Donc elles ſont partout également éloignées l'une de l'autre : Donc elles ſont paralleles. C. q. f. d. Fig. 15.

* N° 883.

AUTRE DEMONSTRATION.

Tirez AC, & conſiderez que BA & DC qui ſont perpendiculaires à toutes les lignes du plan, le ſont par conſequent à AC : Or, les perpendiculaires éle-

vées sur une même ligne sont paralleles* : Donc, &c.

* N°. 156.

THEOREME IX.

905. *Les lignes paralleles & celles qui sont tirées entr'elles, ou d'une parallele à l'autre, sont dans le même plan.*

Pl. 7. Fig. 16. Soient les paralleles A B, D C, & les lignes A E & D G tirées entr'elles, il faut démontrer que toutes ces lignes sont dans le même plan X.

DEMONSTRATION.

Considerez que le plan étant conçu décrit par le mouvement d'une ligne droite qui s'éloigne uniformement ou parallelement de sa premiere position, si l'on conçoit un plan ainsi décrit par C D qui passe par A, il passera aussi par A B qui est parallele à C D : Donc A B & C D sont dans le même plan *. Les lignes A E & G D y sont aussi, parce que leurs points G & D, & A & E étant dans ce plan, elles y sont entiérement * : Donc, &c.

* N°. 893.

COROLLAIRE.

906. Il suit de-là, *que si l'on a deux paralleles dont l'une soit perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi au même plan.*

THEOREME X.

907. *Les lignes paralleles à une troisiéme ligne, le sont aussi entr'elles.*

Fig. 17. Soient les lignes A B, C D paralleles à la ligne E F, & dans des plans differens X & Y ; car si elles étoient dans le même, la proposition seroit éviden-

te ; il faut démontrer qu'elles ſont paralleles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les lignes AB & EF étant paralleles ſont dans le même plan X *, & que par la même raiſon EF & CD ſont dans le même plan Y : Donc EF qui appartient à ces deux plans, eſt leur commune ſection. Du point H, pris à volonté ſur EF, imaginez qu'on ait élevé dans le plan X, HG perpendiculaire à EF, & du même point, dans le plan Y, HI perpendiculaire à la même commune ſection EF. Obſervez enſuite que HE eſt perpendiculaire par cette conſtruction au plan des lignes GH & HI ; mais AG & IC ſont auſſi perpendiculaires au même plan : Donc elles ſont paralleles * : Donc, &c. * N°. 905. * N°. 904.

THEOREME XI.

908. *Si deux lignes droites qui ſe rencontrent dans un point quelconque, ſont paralleles à deux autres droites, tirées dans un plan different, l'angle que feront ces deux dernieres lignes en ſe rencontrant, ſera égal à celui des deux premieres.*

Soient les lignes AB, & BE qui ſe rencontrent dans le point B, paralleles aux deux autres CD, DF qui ſe rencontrent en D ; il faut démontrer que l'angle CDF que font ces deux lignes, eſt égal à l'angle ABE que font les deux premieres. Pl. 7. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Soient priſes BA & DC égales, de même que BE & DF, & ſoient tirées AC, BD & EF, qui ſeront égales & paralleles, parce qu'elles joignent des paralleles égales *. Tirez auſſi AE & CF. * N°. 163.

Cela fait, conſiderez que les deux lignes A C & E F étant paralleles à B D, ſont paralleles entr'elles par la propoſition précedente, & qu'étant égales, les lignes A E & C F qui les joignent, ſont auſſi égales & paralleles: Donc les trois côtés du triangle A B E ſont égaux à ceux du triangle C D F: Donc les angles de ces triangles oppoſés aux côtés égaux, ſont égaux *: Donc l'angle ABE eſt égal à C D F. C. q. f. d.

* N°. 141.

THEOREME XII.

Pl. 7. Fig. 19.

909. *Si une ligne droite A B eſt perpendiculaire à deux plans X, & Y, ils ſeront paralleles.*

DEMONSTRATION.

Conſiderez que A B étant perpendiculaire à Y fait des angles droits avec toutes les lignes de ce plan qui paſſent par B *, & que par la même raiſon elle en fait avec toutes les lignes du plan X qui paſſent par A. Ce qui fait voir que le plan X n'incline vers aucun côté ſur le plan Y, & qu'ainſi ces plans ſont paralleles. C. q. f. d.

* N°. 883.

THEOREME XIII.

910. *Si deux lignes droites A B, A C tirées ſur un plan X, & qui ſont un angle quelconque B A C, ſont paralleles à deux autres D E, D F d'un ſecond plan Y, le premier plan X ſera parallele au ſecond Y.*

DEMONSTRATION.

Fig. 20.

Du point A, imaginez A I perpendiculaire ſur X, & l'angle I A C ſera droit: Menez enſuite par I, I G & I H, paralleles à D F & D E, elles ſeront paralleles à A B & A C, les unes & les autres l'étant à D F & D E *; d'où il ſuit, que l'angle I A C étant droit, de même que I A B, puiſque I A eſt perpen-

* N°. 907.

diculaire à X *, GI & IH font auſſi des angles droits avec cette ligne : Donc elle eſt perpendiculaire à Y *. Mais elle eſt également perpendiculaire à X : Donc par la propoſition précedente les deux plans X & Y ſont paralleles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* N°. 883.
* N°. 901.

THEOREME XIV.

911. *Si un plan V coupe deux plans paralleles X & Y, les communes ſections A B, C D du plan V avec les deux autres ſont paralleles.* Pl. 8. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Les plans X & Y étant paralleles par la ſuppoſition, ils ſont partout également éloignés l'un de l'autre, de maniere qu'étant prolongés à l'infini ils ne ſe rencontreroient point : Or, les communes ſections AB & CD qui ſont ſur les plans X & Y étant auſſi prolongées à l'infini, ſuivront la direction de ces plans, c'eſt-à-dire, qu'elles ſeront toujours également éloignées : Donc elles ſont paralleles.

REMARQUE.

912. Il eſt évident qu'entre des plans paralleles la perpendiculaire eſt la plus courte ; que les obliques égales ſont également inclinées, qu'elles ſont paralleles ſi leur inclinaiſon eſt du même côté, &c. & qu'enfin tout ce qu'on a dit des obliques qui tombent ſur une ligne, & de celles qui ſont tirées entre des paralleles, convient également à celles qui ſont tirées ſur un plan ou entre deux plans paralleles, & qu'on peut le démontrer de la même maniere.

THEOREME XV.

Pl. 8. Fig. 2. 913. *Si une ligne A B eſt perpendiculaire à un plan X, tous les plans qui paſſeront par cette ligne ſeront perpendiculaires au même plan.*

Soit le plan Y qui paſſe par la perpendiculaire A B, & dont D E eſt la commune ſection avec X, il faut démontrer que Y eſt perpendiculaire à X.

DEMONSTRATION.

Du point A, tirez A C ſur X, perpendiculaire à la commune ſection D E. A B eſt auſſi perpendiculaire à cette commune ſection, puiſqu'elle l'eſt à tout le plan X : Donc l'angle C A B eſt droit : Donc Y eſt perpendiculaire à X *. Comme on démontrera la même choſe de tous les plans qu'on imaginera paſſer par A B, il s'enſuit qu'ils ſeront tous perpendiculaires à X. C. q. f. d.

* N° 888.

THEOREME XVI.

Fig. 3. 914. *Si deux plans X & Y qui ſe coupent, ſont perpendiculaires à un autre Z, leur commune ſection A B ſera auſſi perpendiculaire au même plan.*

DEMONSTRATION.

Le plan Y étant perpendiculaire au plan Z, ſi du point A de ſa commune ſection avec X, on abbaiſſe une perpendiculaire A B ſur C D, elle ſera dans le plan Y qui eſt perpendiculaire à Z ; & elle ſera auſſi dans le plan X par la même raiſon : Donc cette perpendiculaire ſera la commune ſection A B des deux plans Y & X : Mais comme elle ſera auſſi perpendiculaire aux deux communes ſections C D, F E des deux plans Y & X avec Z, elle ſera perpendicu-

laire à deux lignes du plan Z, & par conſequent perpendiculaire à tout ce plan * : Donc, &c. *N°. 901.

COROLLAIRE.

915. AB étant perpendiculaire ſur BD & BF, ces deux lignes le ſont auſſi réciproquement ſur AB, c'eſt-à-dire ſur la commune ſection des deux plans X & Y ; d'où il ſuit, que l'angle FBD qu'elles font enſemble ſur le plan Z, eſt celui de l'inclinaiſon des deux plans X & Y. *N°. 888.

THEOREME XVII.

916. *Si deux lignes droites AB, CD ſont coupées par trois plans paralleles X, Y & Z, elles le ſeront proportionnellement.*

Il faut donc démontrer que CI. ID :: AG. GB. Pl. 8. Fig. 4. ou que AG. GB :: CI. ID.

DEMONSTRATION.

Du point A ſoit mené AE parallele à CD, qui lui ſera égale, parce qu'entre des plans paralleles X & Z, les paralleles ſont égales. Des points I & G où les lignes AB & CD rencontrent le plan Y, tirez IG qui coupera AE en L; GL & BD, ou BE ſeront paralleles, car le plan DCAB coupant des plans paralleles Y & Z, les communes ſections IG & BD ſont paralleles *. *N°. 911.

Cela fait, le triangle BAE a ſes deux côtés AB, AE, coupez parallelement par la commune ſection GL parallele à ſa baſe BE : Donc ils ſont coupés proportionnellement * : Donc AL. LE :: AG. GB. *N°. 781. Mais à cauſe que AE eſt égale & parallele à CD, AL = CI, & LE = ID. Mettant donc dans la proportion précedente CI & ID à la place de AL, &

de L E, on aura C I. I D :: A G. G B, ou A G. G B : : C I. I D. C. q. f. d.

THEOREME XVIII.

917. *Dans un angle ſolide A, compoſé de trois angles plans B A C, C A D & D A B, deux de ces angles tels qu'on voudra, comme C A D & D A B pris enſemble ſeront toujours plus grands que le troiſiéme B A C.*

DEMONSTRATION.

Pl. 8. Fig. 5. Faites l'angle B A E égal à B A D, & prenez A E = A D. Tirez B E C, D C & D B, & conſiderez que les triangles B A E, B A D ſont égaux ; car A D = A E, A B eſt commun, & les angles D A B, B A E ſont égaux : Donc ces deux triangles ſont égaux * : Ainſi D B = B E.

*N°. 243.

Préſentement, conſidérant les deux triangles E A C & C A D, ils ont auſſi les côtés A D & A E égaux entr'eux, & A C commun : Mais ſi E C eſt plus petite que D C, l'angle E A C ſera plus petit que C A D *, & par conſequent l'angle B A C ſera plus petit que les deux autres angles de l'angle ſolide A : Or, dans le triangle B D C les deux côtés B D, D C pris enſemble, ſont plus grand que le troiſiéme B C * : Donc en ôtant B D de la ſomme de ces deux côtés, & pareillement de B C, B E qui eſt égal à B D, il reſtera D C plus grand que C E : Donc l'angle E A C ſera plus petit que C A D : Donc, &c.

*N°. 246.

*N°. 33.

THEOREME XIX.

918. *Tous les angles plans qui compoſent un angle ſolide ſont toujours, pris enſemble, plus petits que quatre angles droits.*

REMARQUES.

I.

919. On ſuppoſe dans ce Théorême que tous les angles plans qui compoſent l'angle ſolide ne font point d'inclinaiſon rentrante, mais qu'au contraire elles ſont toutes ſaillantes.

II.

Cette propoſition peut ſe démontrer avec une grande facilité de cette maniere.

Soit un point C, pris à volonté ſur un plan X, autour duquel on tire tant de lignes droites qu'on voudra. Tous les angles formés par ces lignes ſont évidemment égaux à quatre angles droits *: Or, il eſt clair qu'on ne peut élever le plan en pointe, enſorte qu'il faſſe un angle ſolide en C, qu'en diminuant les angles plans qui ſont autour de C: Donc lorſqu'ils feront un angle ſolide, ils vaudront néceſſairement moins de quatre angles droits. Pl. 8. Fig. 6. * N. 99.

Démonſtration plus rigoureuſe de la même propoſition.

Soit l'angle ſolide C compoſé, par exemple, de cinq angles plans; il faut démontrer qu'ils ſont plus petits que quatre angles droits. Fig. 7.

Conſiderez que ſi on tire les baſes de ces angles plans, ou ce qui eſt la même choſe, ſi on joint leurs côtés deux à deux par des lignes droites A B, B D, D E, &c. elles feront un pentagone A B D E F A.

Si d'un point G, pris à volonté dans ce polygone, on imagine des lignes tirées à tous les angles de ſa circonference, il ſera partagé en autant de triangles qu'il a de côtés, c'eſt-à-dire, en 5 dans cet exemple.

& l'angle ſolide C ſera compoſé de même nombre de triangles, dont les baſes ſeront les côtés du pentagone.

Préſentement il faut conſidérer que chaque angle du pentagone, comme A B D, eſt plus petit, par la propoſition précedente, que les deux angles ABC, C B D des triangles A C B, B C D élevés ſur les côtés de cet angle; & comme il en eſt de même de tous les autres angles de la circonference du pentagone, & de tous ceux des triangles qui forment l'angle ſolide C; il s'enſuit que tous les angles de la baſe des triangles dont les ſommets partent du point G du pentagone, ſont, pris enſemble, plus petits que ceux de la baſe de tous les triangles qui forment l'angle ſolide C. Mais les ſupplémens de ceux du pentagone valent quatre angles droits, parce qu'ils ſont autour d'un même point ſur un plan: Donc ceux des triangles de l'angle ſolide qui ſont en même nombre que ceux du pentagone, valent moins de quatre droits, puiſqu'ils ſont les ſupplémens d'angles plus grands que ceux du pentagone: Donc tous les angles plans qui compoſent l'angle ſolide C ſont moindres que quatre angles droits. C. q. f. d.

PROBLEMES.

I.

920. *D'un point donné A, hors un plan X, faire tomber une perpendiculaire ſur ce plan.*

RESOLUTION.

Pl. 8. Fig. 8. Poſez une pointe du compas au point A, & ouvrez-le de maniere qu'avec l'autre pointe, on puiſſe marquer trois points B, C & D ſur le plan X, à égale diſtance de A. Cherchez enſuite le centre E du cercle qui paſſe par ces trois points, & du point A au point

point E, tirez la ligne A E, elle ſera perpendiculaire à X.

DEMONSTRATION.

La ligne A E a par la conſtruction, ſes deux points A & E également éloignés des trois points B, C & D.: Donc par la propoſition du N. 900. elle eſt perpendiculaire au plan X qui paſſe par ces trois points.

II.

921. *D'un point donné A ſur un plan X, élever une perpendiculaire ſur ce plan.*

RESOLUTION.

Prenez un point B hors du plan, & abbaiſſez de ce point la perpendiculaire B C ſur le plan. Menez enſuite par A une parallele A D à B C, elle ſera perpendiculaire au plan X. Pl. 8. Fig 9.

DEMONSTRATION.

Les lignes paralleles A D, B C ſont dans le même plan *; B C eſt perpendiculaire au plan X par la conſtruction : Donc le plan D A C B des deux paralleles qui paſſe par la perpendiculaire B C, eſt auſſi perpendiculaire à X * : Donc D A qui eſt dans ce plan, & qui eſt parallele à B C, eſt également perpendiculaire à X. C. q. f. d. * N°. 905. * N°. 913.

AUTRE RESOLUTION.

Tirez à volonté deux lignes A D, A E qui paſſent par le point donné A. Appliquez enſuite l'un des côtés d'une *équerre* (qui eſt un inſtrument compoſé de deux regles de cuivre ou de bois qui font un angle droit) appliquez, dis-je, un des côtés de cet inſtrument ſur A E; enſorte que le ſommet de l'angle Fig. 10.

droit de l'équerre ſoit ſur le point donné A. Appliquez une ſeconde équerre de la même maniere ſur la ligne AD ; faiſant enſuite toucher les deux côtés de ces équerres qui ne ſont pas couchés ſur le plan, la ligne droite AB qu'ils donneront ſera perpendiculaire au plan ; car elle le ſera par la conſtruction aux deux lignes AD, AE : Donc *, &c.

* N. 601.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE X.

I.

DES SOLIDES.

922. NOUS avons appellé *Corps* ou *Solide* l'étendue conſiderée avec la longueur, la largeur, & la profondeur, & nous avons obſervé que le corps eſt terminé par les ſurfaces, comme les ſurfaces le ſont par des lignes, & les lignes par des points.

923. Les differentes figures des ſurfaces qui terminent les corps, & leur nombre, déterminent les differentes eſpeces de corps.

924. On appelle *baſe* d'un ſolide celle de ſes ſurfaces planes, ſur laquelle on le conſidere ordinairement poſé ou ſoutenu ſur un plan.

925. *La pyramide* eſt un ſolide qui a pour baſe Pl. 8. Fig. 11.

un polygone quelconque, & qui eſt entouré de triangles qui ſe réuniſſent par le ſommet en un ſeul point, qu'on appelle le *ſommet* de la pyramide.

Tel eſt le corps ABCDES dont la baſe eſt le pentagone ABCDE, & dont le ſommet eſt en S où les triangles de la pyramide font un angle ſolide.

Pl. 8. Fig. 12. 926. La pyramide reçoit differens noms, ſuivant la figure de ſa baſe. Si cette baſe eſt un triangle, comme ABC, elle eſt appellée *triangulaire*; *quadrilatere*, ſi elle a pour baſe un quadrilatere, & enfin pyramide pentagone ou exagone, &c. ſuivant que ſa baſe eſt un pentagone ou un exagone, &c.

Fig. 13. 927. La pyramide eſt encore *droite* ou *oblique*. Elle eſt droite ſi ſa baſe eſt une figure réguliere CDEF, & ſi la perpendiculaire AB abbaiſſée du ſommet A, tombe ſur le centre B de la baſe. Elle eſt oblique ſi la baſe eſt une figure irréguliere, ou ſi la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe, ne tombe pas ſur le centre de cette baſe.

928. La hauteur de toute pyramide eſt la perpendiculaire AB abbaiſſée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe.

929. La pyramide peut être conçue décrite par le mouvement d'une ligne droite AD, attachée fixement en A, & qui parcourre tous les côtés de la baſe de la pyramide, par ſon autre extrémité D.

THEOREME I.

930. *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallele à ſa baſe, la ſection ſera un polygone ſemblable à celui de la baſe de la pyramide.*

Fig. 14. Soit la pyramide X dont le ſommet eſt S, & la baſe l'exagone Y; il faut démontrer que cette pyramide étant coupée par le plan *y*, parallele à ſa

baſe, la ſection de ce plan avec les triangles qui entourent la pyramide, eſt un exagone ſemblable à Y. Pour cet effet il faut que tous les côtés *a b*, *b c*, &c. de la ſection *y* ſoient proportionnels aux côtés A B B C, de la baſe Y, & que les angles que font ces côtés ſoient égaux aux angles correſpondans de la baſe Y.

DEMONSTRATION.

Le plan coupant *y* étant parallele à Y, les côtés S A, S B, &c. ſont coupés proportionnellement par ce plan * : Ainſi les triangles S A B, S *a b*, ſont ſemblables * : Donc S *a*. S A :: *a b*. A B :: S *b*. S B. On aura de même, à cauſe des triangles ſemblables B S C, *b* S *c*, *b c*. B C :: S *b*. S B, c'eſt-à-dire, que les côtés *b c* & B C ſont entr'eux comme les côtés S *b*. S B. Mais tous les côtés des triangles qui entourent la pyramide étant coupés proportionnellement par le plan parallele *y*, ont tout le même rapport avec leur partie retranchée par le plan *y* vers le ſommet S : Donc tous les côtés de la ſection *y* auront auſſi le même rapport avec les côtés de la baſe Y : Donc ils ſeront proportionnels à ces côtés.

* N°. 916.

* N°. 791.

Pour démontrer à préſent que les angles que font enſemble les côtés de la ſection *y*, ſont égaux aux correſpondans des côtés de la baſe Y ; il faut conſiderer que les lignes *a b* & *b c*, qui font l'angle *ab c*, étant paralleles aux deux A B & B C, qui ſont l'angle A B C, ces deux angles ſont égaux* ; & comme on peut démontrer la même choſe de tous les autres angles de la ſection *y*, il s'enſuit que cette ſection a ſes angles égaux, chacun à chacun, à ceux de la baſe Y, & qu'elle a auſſi ſes côtés proportionnels à ceux de cette baſe: Donc elle lui eſt ſemblable*. C. q. f. d.

* N°. 908.

* N°. 832.

THEOREME II.

931. *Si l'on coupe une pyramide par un plan, qui paſſant par ſon ſommet, coupe ſa baſe en deux parties quelconques, cette ſection ſera un triangle.*

DEMONSTRATION.

Pl.S. Fig.15. Soit la pyramide X coupée par ſon ſommet par le plan S C D, qui coupe ſa baſe en deux parties quelconque A & B; il eſt évident que cette ſection eſt un triangle, & qu'elle le ſera également dans toute autre pyramide; car elle aura toujours pour baſe la ligne droite C D, qui partagera celle de la pyramide en deux parties quelconques, & elle ſera terminée par deux lignes droites C S, D S, tirées des extrémités de C D au ſommet S de la pyramide: Donc cette ſection ſera terminée par 3 lignes droites: Donc elle ſera un triangle.

Fig. 16. 932. Le *Cone* eſt un ſolide qui a pour baſe un cercle, & qui eſt terminé par une ſuperficie courbe qui forme une pointe au-deſſus de ſa baſe. Cette pointe ſe nomme le *ſommet* du cone.

Tel eſt le ſolide X, dont la baſe eſt le cercle A D B E A, & le ſommet le point S.

933. La ligne S C tirée du ſommet du cone au centre de ſa baſe, ſe nomme ſon *axe*, & la ligne S A ou S B tirée du même ſommet à un point quelconque A ou B de ſa circonference, ſe nomme *le côté du cone.*

934. Le cone peut être regardé comme une pyramide dont la baſe eſt un polygone d'une infinité de côtés.

935. Si l'axe du cone S C eſt perpendiculaire ſur ſa baſe, le cone eſt *droit*; alors il peut être conçu

décrit par la circonvolution d'un triangle rectangle S C B autour de ſon côté S C. Ce triangle eſt appellé le *plan generateur* du cone. Il ſuit de cette formation, que le ſommet S eſt également diſtant de tous les points de la circonference de la baſe du cone.

936. Le cone eſt *oblique* ſi ſon axe S C eſt oblique ſur ſa baſe. Il ſe nomme auſſi quelquefois *ſcalene*. Pl. 9. Fig. 1.

937. La hauteur du cone eſt une perpendiculaire abbaiſſée de ſon ſommet ſur ſa baſe : Ainſi dans le cone droit, ſa hauteur eſt la même que la grandeur de ſon axe ; & dans l'oblique, c'eſt la perpendiculaire S D qui tombe du ſommet S, ſur le plan A B de la baſe du cone, prolongé en D. Il eſt évident que cette hauteur eſt plus petite que l'axe S C du cone.

938. Le cone oblique ſe conçoit décrit par le mouvement d'une ligne droite S A, attachée fixement en S, dont l'autre extrémité A tourne autour de la circonference du cercle de la baſe du Cone.

THEOREME III.

939. *Si l'on coupe un cone droit ou oblique par un plan parallele à ſa baſe, la ſection ſera toujours un cercle.*

Soit le cone droit X coupé par le plan G F parallele à ſa baſe, il faut démontrer que la ſection G F eſt un cercle. Mais c'eſt ce qui eſt évident, ſi l'on conçoit le cone formé par le triangle generateur D C B ; car concevant ce triangle rempli d'une infinité de petites lignes, comme E F, paralleles à C B, & ſi proches les unes des autres, qu'elles rempliſſent toute ſa ſuperficie, chacune de ces lignes dans le Fig. 2.

mouvement du triangle D C B, décrira un cercle autour de l'axe D C. Ainſi le cone ſera ainſi formé d'une infinité de cercles paralleles à ſa baſe, & qui vont en diminuant vers ſon ſommet; par conſequent toutes les ſections paralleles à ſa baſe, comme G F, ne peuvent donner que des cercles : Donc, &c.

Pl. 9. Fig. 3. Si le cone eſt oblique, comme *a d b*, & qu'on le coupe auſſi par un plan *g h* parallele à ſa baſe, ſa ſection *g h* ſera auſſi un cercle. Pour le démontrer, tirez l'axe *d c*, il coupera le diametre *g h* en deux également; car à cauſe des paralleles *ab*, *g h*, les angles
* N°. 153. *d g h*, *d a b* ſeront égaux, de même que *d h g*, *d b a**. C'eſt pourquoi les triangles *a d b*, *g d h* ſont ſembla-
* N°. 774. bles *, de même que *d c b* & *d e h* : Ainſi l'on a, *ab*. *gh* :: *db*. *dh*, & *bc*. *eh* :: *db*. *dh* : Donc *ab*. *gh* ::
* N°. 616. *bc*. *eh**, ou en permutant, *ab*. *bc* :: *gh*. *eh* : Or *ab* eſt double du rayon *bc* : Donc *gh* eſt pareillement double de *eh*; & comme on peut démontrer la même choſe de toutes les lignes qui forment la ſection *g h*, il s'enſuit que toutes les extrémités de cette ſection ſont également éloignées de *e*, & qu'ainſi elle forme la circonference d'un cercle : Donc, &c.

940. Si l'on coupe la pyramide ou le cone par un plan parallele à la baſe, & que la partie vers le ſommet ſoit enlevée; ce qui reſte de la pyramide ou du cone eſt appellé *pyramide tronquée*, ou *cône tronqué*.

941. Il eſt évident que la ſection d'un cone ſoit droit ou oblique, formée par un plan qui paſſe par ſon axe, eſt toujours un triangle, qui eſt iſoſcelle ſi le cone eſt droit, & ſcalene, s'il eſt oblique.

REMARQUE.

Il y a encore d'autres ſections du cone, mais on ne les conſidere pas dans la Géometrie élémentaire.

Ces Sections ſont

942. 1°. Celle qui eſt formée par un plan D A G parallele au côté C E du cone, ſe nomme *parabole*. Pl. 9. Fig. 4.

943. 2°. Celle qui eſt formée par un plan A B qui coupe les deux côtés oppoſés du cone obliquement, ſe nomme *Ellipſe*.

944. Et 3°. celle qui eſt formée par un plan G A H parallele à l'axe C D du cone, ou qui lui étant oblique, coupe le cercle de la baſe, ſe nomme *hyperbole*. Fig. 5.

C'eſt dans les proprietés de ces trois differentes ſections que conſiſtent les traités appellés *ſections coniques*, qui ſont d'un uſage infini dans la Géometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans celle qui traite des lignes courbes. Fig. 6.

945. Le *priſme* eſt un ſolide terminé par des ſurfaces planes, parmi leſquelles il y en a deux oppoſées, égales, ſemblables, & paralleles. Ces deux ſurfaces ſe nomment les *baſes* du priſme, parce qu'on peut le conſiderer également poſé ſur l'une ou ſur l'autre.

946. Comme les deux baſes du priſme ſont égales, ſemblables, & paralleles, les lignes qui les joignent enſemble, c'eſt-à-dire, qui ſont tirées des angles de la baſe ſupérieure à l'inférieure, forment des parallelogrammes; enſorte qu'on peut définir le priſme, *un ſolide X qui a pour baſes deux polygones égaux ſemblables & paralleles Z & Y, & qui eſt entouré de parallelogrammes.* Fig. 7.

947. Le priſme reçoit differens noms relatifs à la figure de ſa baſe.

Si ſa baſe eſt un triangle, il ſe nomme *triangulaire*, comme le priſme P; *quadrilatere*, ſi elle eſt un quadrilatere, & enfin priſme pentagone, exagone, &c. ſi ſa baſe eſt un pentagone ou un exagone, &c. Fig. 8.

948. Lorſque la baſe du priſme eſt un parallelo- Fig. 9.

gramme, il ſe trouve terminé de tous côtés par des parallelogrammes, & alors il ſe nomme *parallelipipede*.

Enſorte, que le parallelipipede X eſt un ſolide qui a pour baſe ſupérieure A, & pour inférieure B, deux parallelogrammes égaux & ſemblables, & qui eſt entouré de parallelogrammes.

949. Si la baſe du prime eſt un cercle, le ſupérieur & l'inférieur ſont joints enſemble par une infinité de petits parallelogrammes qui font une ſurface courbe qui entoure ou enveloppe le ſolide, qui ſe nomme alors *Cylindre*.

Pl. 9. Fig. 10. Ainſi le cylindre A B C D eſt un ſolide qui a pour baſes deux cercles égaux & paralleles, joints enſemble par une ſuperficie courbe. On peut le conſidérer comme un priſme d'une infinité de côtés.

950. La ligne E G tirée du centre E du cercle ſupérieur C D, au centre G de l'inférieur A B, ſe nomme l'*axe* du cylindre. Lorſque cette ligne eſt perpendiculaire à la baſe, le cone eſt *droit*, autrement il eſt *oblique* ou *ſcalene*.

951. Le cylindre droit peut être conçu décrit par la circonvolution d'un rectangle E G B D autour de
Fig. 11. ſon *axe* E G; & l'oblique A E, par une ligne droite A B qui ſe meut autour de la circonference de la baſe A I F L, faiſant toujours le même angle B A F vers le même côté F.

952. On peut conſiderer le priſme comme décrit ou formé, de même que le cylindre, par une ligne qui ſe meut autour de ſa baſe, en faiſant toujours le même angle vers le même côté avec la baſe. Si l'angle qu'elle fait avec la baſe eſt droit, le priſme eſt droit, autrement il eſt oblique.

953. Il ſuit de cette formation du cylindre & du priſme, *que leurs ſections par des plans paralleles aux*

baſes, ſont des figures égales & ſemblables aux baſes. Pl. 9. Fig. 9.

Car ſi l'on imagine pour le cylindre droit A D, le rectangle G D rempli d'une infinité de lignes, comme H L, paralleles à la baſe A B, & qui le rempliſſent entiérement; il eſt évident que toutes ces lignes décriront, dans la circonvolution du rectangle G D, des cercles égaux à celui de la baſe, ces lignes étant égales au rayon G B de la baſe : Donc toutes les ſections de ce ſolide par des plans paralleles à ſa baſe, ſeront des cercles égaux à la baſe.

Si le cylindre eſt oblique, comme A E, ſes côtés oppoſés A B, E F ſont paralleles, l'angle B A E étant égal à E F P *. C'eſt pourquoi toutes les paralleles à A F, comme G H qui paſſeront par l'axe C D, ſeront égales * : Mais elles ſont évidemment les diametres des cercles qui compoſent le cylindre : Donc tous ces cercles ayant des diametres égaux, ſont égaux : Donc toutes les ſections du cylindre oblique par des plans paralleles à ſa baſe, ſont des cercles égaux à ſa baſe. Pl. 5. Fig. 11. * N°. 154. * N°. 162.

Il en eſt auſſi de même à l'égard du priſme droit & de l'oblique; car coupant le premier X par un plan V parallele à ſa baſe Y, tous les côtés de cette ſection ſeront égaux à ceux de la baſe; mais il eſt clair qu'ils ſont les mêmes angles que ſont entr'eux les rectangles dont il eſt entouré, leſquels angles ſont les mêmes que ceux de la circonference de la baſe : Donc cette ſection ou ce plan eſt une figure égale & ſemblable à celle de la baſe. Ce même raiſonnement peut s'appliquer aux ſections paralleles à la baſe du priſme oblique : Donc toutes les ſections des cylindres & des priſmes, paralleles aux baſes de ces ſolides, ſont des figures égales & ſemblables à celles de ces baſes. C. q. f. d. Fig. 12.

954. La hauteur du cylindre eſt une perpendicu-

laire abbaiſſée de ſa baſe ſupérieure ſur l'inférieure.

Pl. 9. Fig. 10. & 11. Ainſi dans le cylindre droit, la hauteur eſt égale à celle de l'axe, & elle peut être exprimée par l'axe; & dans l'oblique, c'eſt la perpendiculaire E P abbaiſſée du point E de la baſe ſupérieure ſur le plan de l'inférieure prolongée en P.

955. Les priſmes & les parallelipipedes ſont auſſi *droits* ou *obliques*.

Ils ſonc droits, lorſque les plans qui les entourent ſont perpendiculaires à celui de la baſe, autrement ils ſont obliques.

956. La hauteur des priſmes & des parallelipipedes eſt, comme dans le cylindre, une perpendiculaire abbaiſſée de la baſe ſupérieure ſur l'inférieure: Enſorte que lorſqu'ils ſont droits, leur hauteur eſt la même que celle des parallelogrammes dont ils ſont entourés; & s'ils ſont obliques, c'eſt la perpendiculaire qui tombe de la baſe ſupérieure ſur le plan de l'inférieure prolongé s'il en eſt beſoin.

Fig. 13. 975. La *ſphere* ou le *globe*, car ces deux mots ſignifient la même choſe, eſt un ſolide terminé par une ſurface courbe, dont tous les points ſont également éloignés d'un point intérieur C, qui ſe nomme le *centre* de la ſphere.

958. On peut concevoir la ſphere décrite par le mouvement d'un demi-cercle A D B autour de ſon diametre A B.

Alors on verra

Fig. 14. 959. 1°. Que le centre C du demi-cercle A D B l'eſt auſſi de la ſphere, & que toutes les lignes tirées de ce point à la ſuperficie de la ſphere ſont égales. On les appelle rayons de la ſphere, comme C D, C F, &c.

960. 2°. Que toutes les lignes, comme E F qui

paſſent par le centre de la ſphere, & qui ſe terminent de part & d'autre à ſa ſuperficie, ſont égales. On les appelle *diametres de la ſphere.* Le diametre A B ſur lequel on imagine que le demi-cercle A D B s'eſt mû pour décrire la ſphere, ſe nomme l'*axe* ou l'*aiſſieu* de la ſphere. Ces extrémités A & B en ſont nommées les *poles.*

961. 3°. Que ſi l'on éleve ſur le diametre A B du demi-cercle A D B, une infinité de perpendiculaires, comme C D, H G, L K, &c. elles décriront, dans la formation de la ſphere, des cercles paralleles entre-eux, & perpendiculaires à l'axe A B. Le plus grand de ces cercles eſt celui qui eſt décrit par le rayon C D, également éloigné des poles A & B; les autres ſont d'autant plus petits qu'ils s'éloignent du centre C, ou qu'ils s'approchent des poles A & B. Tous ces cercles ſont appellés *cercles paralleles.*

962. 4°. Que les cercles paralleles décrits par des lignes G H & K L, dont les points H & L ſont également diſtans du centre C, ou de chacun des deux poles A & B, ſont égaux entr'eux.

Car prolongeant les lignes G H & K L en M & en N, les cordes G M & K N ſont également diſtantes du centre C par la ſuppoſition : Donc elles ſont égales * : Donc les cercles décrits par leurs moitiés H G & K L, ſont auſſi égaux.

* N°. 192.

963. 5°. Que toute ſection de la ſphere eſt un cercle; car ſi la ſection paſſe par le centre de la ſphere; les points qui la terminent, qui ſont ſur la ſuperficie de la ſphere, ſont tous également diſtant du centre C : Donc ils forment la circonference d'un cercle, dont ce point eſt le centre. Si la ſection ne paſſe pas par le centre C de la ſphere, on tirera de C une perpendiculaire C E ſur cette ſection A B. Le point C de cette perpendiculaire eſt également diſtant de tous

Pl. 9. Fig. 15.

les points qui terminent la ſection AB : Donc tous les autres points de cette perpendiculaire ſont également diſtans des mêmes points * : Donc le point E qui eſt ſur la ſection, eſt le centre de cette ſection qui ainſi eſt un cercle.

* N°. 123.

964. Tous les cercles qui paſſent par le centre de la ſphere ſont appellés *grands cercles*, & ils ſont tous égaux entr'eux, ayant pour diametre celui de la ſphere, qui eſt leur commune ſection. Les autres ſont appellés *petits cercles*.

965. Il eſt évident que les grands cercles ſe coupent en deux parties égales, puiſque leur commune ſection eſt le diametre de la ſphere, qui leur eſt commun, & qui les coupe tous en deux également.

Pl. 9. Fig. 16. 966. Il eſt également évident que tous les grands cercles coupent la ſphere en deux parties égales ; car ſuppoſant que AB ſoit le diametre d'un grand cercle quelconque, on peut imaginer un autre diametre DE perpendiculaire à AB : Alors les extrémités E & D, de DE, ſeront également éloignées de tous les points de la circonference dont AB eſt le diametre ; d'où il ſuit que la partie de la ſphere, qui eſt vers E, eſt égale à celle qui eſt vers D : Donc, &c.

967. 6°. Que tous les points des circonferences des cercles paralleles ſont également éloignés des *poles de la ſphere*. On appelle auſſi ces poles, ceux des cercles paralleles : Enſorte, que les *poles d'un cercle de la ſphere* ſont deux points dans la ſurface de la ſphere, également éloignés de tous les points de ſa circonference.

Pl. 10. Fig. 1. 968. Une partie quelconque de la ſphere, compriſe entre deux cercles paralleles, comme ABCD, ſe nomme *zone*. Sa ſurface eſt une eſpece de ceinture qui tourne autour de la ſphere.

969. On appelle *ſegment de ſphere* une portion de

la ſphere, comme CDG, compriſe entre une ſection CEDF de la ſphere, & la partie de la ſuperficie de la ſphere qu'elle retranche. C'eſt une eſpece de calote ſolide, qu'on appelle auſſi par cette raiſon *calotte ſpherique.*

970. Un *ſecteur de ſphere* eſt un ſolide, qui a pour baſe la ſurface d'une calote ſpherique, & qui eſt terminé en dedans la ſphere par une ſurface conique, dont le ſommet eſt le centre C de la ſphere. Tel eſt le ſecteur CADBC. Pl. 10. Fig. 2.

971. On donne le nom de *polyedre* à tout corps en general, compoſé de pluſieurs ſurfaces, comme on donne celui de polygone à toutes les figures, quelque ſoit le nombre de leurs côtés : Or, de la même maniere que le cercle peut être conſideré comme un polygone d'une infinité de côtés, de même la ſphere peut l'être comme un polyedre d'une infinité de ſurfaces ; car en ſuppoſant toutes ces ſurfaces infiniment petites, le ſolide qu'elles formeront ne differera point de la ſphere.

II.

DES CORPS REGULIERS.

972. OUTRE les Corps dont on vient de donner la définition ou la deſcription, il y en a cinq autres, qu'on appelle *Réguliers*, parce qu'ils ſont compris ou terminés par des figures régulieres, égales & ſemblables, & qu'ils peuvent être inſcrits ou renfermés dans la ſphere. Ces corps ſont

973. 1°. Le *Tetraëdre* ou la *pyramide réguliere*, terminé par qnatre triangles équilatéraux. Fig. 3.

Pl. 10. Fig. 4. 974. 2°. L'*Exaëdre* ou le *cube* terminé par ſix quarrés. *On peut ſe le repréſenter par un dez à jouer.*

Fig. 5. 975. 3°. L'*Octaëdre* terminé par huit triangles équilatéraux.

Fig. 6. 976. Le *Dodécaëdre* terminé par douze pentagones réguliers.

Fig. 7. 977. 5°. L'*Icoſaëdre* terminé par vingt triangles équilatéraux.

978. On ne peut faire que ces cinq corps réguliers avec les figures régulieres.

Car pour faire des corps de cette eſpece, il faut que les angles des figures qui en font les angles ſolides, ſoient, pris au moins 3 à 3, moindres que qua-
* N°. 918. tre angles droits *.

Or, les angles du triangle équilatéral valent chacun 60 degrés : Donc on peut faire un angle ſolide avec trois triangles équilatéraux. C'eſt celui du *tetraëdre.*

Comme quatre angles du triangle équilatéral ne valent que 240 degrés, on voit encore qu'on peut faire un angle ſolide avec quatre triangles équilatéraux ; c'eſt celui de l'octaëdre.

Cinq angles du triangle équilatéral ne valent encore que 300 degrés : Donc avec cinq triangles équilatéraux on peut faire auſſi un angle ſolide, & c'eſt celui de l'Icoſaëdre : Mais on n'en peut faire avec ſix de ces triangles, parce que ſix de leurs angles valent quatre droits ou 360 degrés : Donc on ne peut faire avec le triangle équilatéral que le tetraëdre, l'octaëdre, & l'icoſaëdre.

A l'égard du quarré, comme chacun de ſes angles ſont droits, il eſt évident qu'on ne peut faire d'angles ſolides qu'avec trois quarrés. Cet angle eſt celui de l'exaëdre ou du cube.

L'angle de la circonference du pentagone eſt de

108 degrés *, trois de ces angles font 324 degrés : Donc ils valent moins que quatre droits : Ainſi avec trois pentagones on peut faire un angle ſolide, & c'eſt celui du dodécaëdre. Quatre angles du pentagone valent 432 degrés, c'eſt-à-dire, plus de 360 : Donc avec quatre pentagones on ne peut point faire d'angle ſolide. * N°. 31.

L'angle de la circonference de l'exagone eſt de 120 degrés. Trois de ces angles valent donc 360 degrés, c'eſt-à-dire, quatre droits : Donc on ne peut faire d'angle ſolide avec l'exagone. Les autres polygones d'un plus grand nombre de côtés que l'exagone, ont leurs angles de la circonference plus grands : Donc ils ſont encore moins ſuſceptibles de faire des angles ſolides : Donc, &c.

Maniere de conſtruire les corps réguliers avec du carton ou autrement.

Conſtruire le Tetraëdre.

979. Soit une ligne A B, priſe à volonté ſur le carton dont on veut ſe ſervir ; on décrira ſur cette ligne le triangle équilatéral A C B. On prolongera les deux côtés de ce triangle en F & en E, & l'on fera B F = B C & A E = A C. On tirera E F, & enſuite du point D, milieu de D F, on tirera D B & D A, & l'on aura le triangle équilatéral E C F partagé en quatre triangles équilatéraux égaux. On taillera ou découpera le carton ſelon la figure de ce triangle, & on ployera chacun des triangles qui ſont ſur les trois côtés de D A B, de maniere que leurs ſommets E, C, & F ſe réuniſſent dans le même point. On colera du papier ſur les jonctions de ces triangles pour les retenir dans cette ſituation, & l'on aura le tetraëdre conſtruit. Pl. 10. Fig. 8.

Si le carton a un peu d'épaiſſeur, on y fera une eſpece d'inciſion avec un canif le long des lignes qui terminenr le triangle A D B, pour avoir plus de facilité à ployer le carton.

Conſtruction de l'Octaëdre.

Pl. 12. Fig. 9. 980. On fera d'abord un triangle équilatéral A C B, comme celui qui a ſervi à conſtruire le tetraëdre. On le partagera en quatre triangles équilatéraux égaux. On prolongera A B en L; enſorte que B L = B E ou A E. On prolongera auſſi D E en G, & l'on fera E G égale à deux fois la ligne D E. On tirera L G. On prolongera C B en H, & de ce point on tirera au point F, milieu de E G, la ligne H F, & enfin de F la ligne F B, & l'on aura les huit triangles équilatéraux qui doivent former l'Octaëdre. Pour cela on les ployera ſur leurs côtés de maniere que leurs angles ſe réuniſſent quatre à quatre dans le même point, & les tenant dans cette ſituation avec du papier collé ſur les côtés par où ils ſe joignent, on aura l'octaëdre conſtruit.

Conſtruction de l'Icoſaëdre.

Pl. 11. Fig. 1. 981. On conſtruira d'abord le triangle équilatéral A C B. On prolongera ſa baſe A B en D; enſorte que A D = 5 A B, c'eſt-à-dire, qu'on portera A B, de B en F, de F en G, de G en H, & de H en D. On menera par C une parallele C E à A D, ſur laquelle on portera A B de C en I; de I en K; de K en L; de L en M, & de M en E, c'eſt-à-dire, que C E contiendra cinq fois A B.

On conſtruira ſur chaque partie de C E des triangles équilatéraux C N I, I O K, &c. On conſtruira de même des triangles équilatéraux ſur chaque partie du prolongement B D de A B, & joignant enſem-

ble ces triangles par les lignes O Y, S P, T Q, V R, X E, D Q, X P, &c. on aura les vingt triangles dont la ſurface de l'icoſaëdre eſt compoſée.

On coupera le carton ſelon les triangles extérieurs terminés en N, O, P, &c. & Y, S, T, &c. & on les ployera tous enſuite ſur leurs côtés, de maniere qu'on réuniſſe leurs angles 5 à 5 dans le même point, & en les fixant ainſi avec du papier côlé ſur les côtés de ces differens triangles, on aura l'Icoſaëdre conſtruit.

Conſtruire le Cube.

982. On fera d'abord un quarré I L M K. On prolongera ſes quatre côtés de part & d'autre, ſçavoir I L en A & en B; enſorte que I A = I L & L B = 2 I L. K M en C & en D, enſorte que K C = I A & M D = L B. On fera auſſi E I & K F égales chacune à I K & L G, & M H égale à la même ligne I K ou L M. On coupera L B & M D en deux également en N & en O, & tirant enſuite les lignes A C, E G, F H, N O, & B D, on aura les ſix quarrés qui compoſent la ſurface du cube. On les découpera de deſſus le carton ſur lequel on les aura tracés, & on les ployera ſur les quatre côtés du quarré L K; on ployera auſſi B D ſur N O, qui doit faire la ſurface parallele à L K, & on les joindra enſemble comme il convient pour qu'ils forment le cube, de la maniere qu'on l'a expliqué dans les problêmes ou conſtructions précedentes. Pl. 11. Fig. 2.

Conſtruire le Dodécaëdre.

983. On conſtruira d'abord un pentagone quelconque régulier A B C D E, puis un autre pentagone égal & ſemblable ſur chacun des côtés de ce premier pentagone.

Sur un de ces pentagones *a* on conſtruira le pen- Fig. 3.

tagone *b*, & sur le côté F G de ce polygone, le pentagone *c*; puis sur les quatre côtés restans de *c* quatre pentagones, & l'on aura après cela les 12 pentagones réguliers qui donnent la surface du Dodécaëdre.

On les découpera du carton sur lequel on suppose qu'ils sont tracés, & on les ployera chacun sur les côtés des deux pentagones A B C D E & *c*; après quoi on les joindra ensemble de maniere que leurs angles se réunissent trois à trois, pour faire les angles solides de ce solide: on les fixera ainsi en colant leurs extrémités avec du papier ou autrement, & l'on aura le dédocaëdre construit.

REMARQUE.

984. Comme ces cinq corps réguliers ne sont pas d'un grand usage dans la Géometrie, on ne s'arrêtera pas ici à démontrer qu'ils peuvent s'inscrire ou se renfermer dans une sphere; on donnera seulement en faveur des commençans, qui seront bien aise de s'amuser à leur construction, ce qu'il faut faire pour les terminer, de maniere qu'ils puissent être inscrits dans la même sphere. On en trouvera la démonstration à la fin du 13e Livre de cet Ouvrage. Ceux qui sont bien aise qu'on ne leur supprime rien, pourront y avoir recours; les autres pourront s'en passer, ce Problême étant plus de curiosité que d'utilité.

PROBLEME.

985. *Le diametre d'une sphere étant donné, trouver les côtés des cinq corps réguliers propres à être inscrits dans cette sphere.*

Pl. 11. Fig. 4. Soit A B, le diametre de la sphere proposé:

On décrira sur cette ligne un demi-cercle A D B. On prendra A E égale aux deux tiers de A B, & on

élevera au point E la perpendiculaire E D. On tirera A D ; cette ligne ſera le côté du tetraëdre propre à être inſcrit dans la ſphere, dont A B eſt le diametre, ou ce qui eſt la même choſe, elle ſera le côté que doivent avoir chacun des triangles du tetraëdre pour qu'il puiſſe être inſcrit dans cette ſphere.

Si l'on tire D B dans le demi-cercle A D B, cette ligne ſera le côté du cube propre à être inſcrit dans la même ſphere.

Si du point C, milieu de A B, on éleve la perpendiculaire C F, & que par F & par B, on tire F B, cette ligne ſera le côté de l'octaëdre.

Si l'on éleve au point A, la ligne A G perpendiculaire & égale à A B, & qu'on tire C G qui coupera en H le demi-cercle A D B, tirant par ce point, & par A la ligne A H, elle ſera le côté de l'Icoſaëdre.

Enfin, ſi on coupe le côté B D du cube en moyenne & extrême raiſon en I, ſa plus grande partie B I ſera le côté du dodécaëdre.

III.

DES SOLIDES SEMBLABLES.

986. PARMI les corps dont on a parlé juſqu'ici, il y a des Solides, qu'on appelle *ſemblables*.

987. Ce ſont ceux qui ſont terminés par le même nombre de figures ſemblables, également inclinées les unes ſur les autres.

988. Ainſi les priſmes & les parallelipipedes ſemblables, ſont ceux qui ſont terminés de tous côtés par des parallelogrammes ſemblables, également inclinés ſur leurs baſes, leſquelles ſont des polygones

ſemblables pour les priſmes, & des parallelogrammes auſſi ſemblables pour les parallelipipedes.

989. Les pyramides ſemblables ſont celles qui ayant des baſes ſemblables, ſont entourées de triangles ſemblables, également inclinés ſur les côtés homologues des baſes des pyramides.

990. Les cones & les cylindres ſemblables, ſont ceux dont les diametres des baſes ſont proportionnels à leur hauteur, & qui ſont droits ou inclinés également, c'eſt-à-dire, dont les axes font des angles égaux ſur les baſes.

991. Il eſt évident que les ſpheres ſont des ſolides ſemblables, de même que les polyëdres réguliers de même eſpece, comme les pyramides régulieres, les Octaëdres, Dodécaëdres, &c.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE XI.

I.

De la meſure des ſurfaces des Corps.

REMARQUE.

992. EN parlant de la ſurface des Corps, on ne conſiderera point celle de leur baſe, à moins qu'on ne l'explique : Ainſi par la ſurface d'une pyramide, on entendra ſeulement la ſurface des triangles dont elle eſt entourée, ſans y comprendre celle du polygone de ſa baſe. Il en ſera de même de la ſurface du priſme, du cylindre, & des autres ſolides.

THEOREME I.

993. *La ſurface d'une pyramide droite eſt égale à un triangle qui a pour baſe la circonference de celle de la*

pyramide, & pour hauteur la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet ſur un des côtés de la baſe.

Soit la pyramide droite ABES, qui a pour baſe le quarré ABEF, dont C eſt le centre, & SC la hauteur ; il faut démontrer que ſa ſuperficie eſt égale au triangle GHI qui a pour baſe la circonference du quarré AE, & pour hauteur SD, abbaiſſée du ſommet S ſur le côté BE de la baſe de la pyramide.

DEMONSTRATION.

Pl. 12. Fig. 1. Tirez les rayons obliques CE, CB de la baſe, & conſiderez que les triangles SCB, SCE ſont égaux; car CB = CE, CS eſt commun, & les angles SCB, SCE ſont droits : Donc SB = SE* : Comme on peut démontrer de même l'égalité de tous les autres côtés des triangles qui entourent la pyramide, il s'enſuit que tous ces triangles auront leurs trois côtés égaux, chacun à chacun, puiſque leurs baſes qui ſont les côtés d'un polygone régulier, ſont auſſi égales entr'elles, & qu'ainſi ils ſont tous égaux *.

* N°. 243.

* N°. 241. Cela poſé, la ſurface de la pyramide vaut donc quatre fois celle du triangle BSE : Mais le triangle HGI qui eſt ſuppoſé avoir même hauteur que BSE & une baſe HI quadruple, vaut quatre fois la ſuperficie ce de triangle * : Donc il eſt égal à la ſuperficie de la pyramide propoſée. C. q. f. d.

* N°. 780.

Il eſt évident que cette même démonſtration peut s'appliquer à toute autre pyramide droite, dont la baſe ſera un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés.

COROLLAIRE.

994. Il ſuit de cette propoſition, que pour avoir la ſuperficie d'une pyramide droite, il faut multiplier

la circonference de ſa baſe par la moitié de la perpendiculaire abbaiſſée de ſon ſommet ſur un des côtés de la baſe.

995. La pyramide oblique n'étant pas entourée de triangles égaux, comme la droite, il faut pour en avoir la ſuperficie, trouver celle de chacun des triangles A S B, B S C & A S C qui forment ſa ſuperficie. La ſomme de leur ſuperficie donnera celle de la pyramide. Ce qui eſt évident. Pl. 12. Fig. 2.

THEOREME II.

996. La ſuperficie d'un cone droit A B S eſt égale à un triangle qui a pour baſe la circonference de celle du cone, & pour hauteur ſon côté S A.

DEMONSTRATION.

Le cone droit peut être conſideré comme une pyramide droite d'une infinité de côtés : Or, par la propoſition précedente cette pyramide eſt égale à un triangle qui a pour baſe la circonference de la baſe de la pyramide, & pour hauteur la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet S ſur un des côtés de la baſe ; cette perpendiculaire dans le cone droit eſt ſon côté S A, qui eſt la ligne la plus courte qu'on puiſſe tirer du ſommet S à la circonference de la baſe : Donc, &c. Fig. 3.

AUTRE DEMONSTRATION.

Le ſommet S du cone droit A S B étant également éloigné de tous les points de la circonference de ſa baſe *, ſi l'on ſuppoſe que la ſuperficie de ce cone puiſſe s'enlever ou ſe développer de maniere qu'on en forme une ſuperficie plane, cette ſuperficie S A C B ſera terminée par les deux côtés égaux A S & S B, & par la ligne courbe A C B, dont tous les points Fig. 3, 4 & 5.

* N°. 935.

ſont également diſtans de S : Donc cette ligne courbe eſt une partie de circonference dont A S ou S B ſont
* N°. 451. les rayons : Donc S A C B eſt un ſecteur * ; mais la ſuperficie d'un ſecteur eſt égale à celle d'un triangle S A B, qui a pour baſe l'arc du ſecteur, & pour hau-
* N°. 452. teur ſon rayon * : Donc le cone, &c.

REMARQUE.

Pl. 13. Fig. 1. 997. Le ſommet S du cone oblique S B D n'étant pas également éloigné de tous les points de la circonference de ſa baſe, on ne peut le concevoir entouré de petits triangles égaux ; c'eſt pourquoi on n'en peut avoir la ſuperficie, comme celle du cone droit ; on la trouve ſeulement par approximation, & par des méthodes qui ne dépendent point des élémens de la Géometrie.

THEOREME III.

998. *La ſurface d'un cone tronqué droit, eſt égale à celle d'un trapeze qui a pour côtés paralleles les circonferences des deux baſes du cone, & pour hauteur la partie de ſon côté, compriſe entre ces baſes.*

DEMONSTRATION.

Fig. 2, 3 & 4. Soit le cone tronqué droit A B C D, dont la partie ſupérieure eſt ſuppoſée avoir été retranchée par plan parallele à la baſe A B.

Si l'on imagine que les côtés du cone ſoient prolongés, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en S, on aura le cone entier S A B, dont le développement donnera le ſecteur S *a b* ; & celui du petit cone S D C, le
* N°. 996. petit ſecteur S *d c* *.

Soit E F = le côté S A du cone, ou le rayon *s a* du ſecteur *s a b*, & F G = à la circonference de ſa baſe, ou à l'arc *a b* du ſecteur ; l'on aura le triangle

E F G égal à la ſuperficie du cone entier S A B, ou à celle du ſecteur *s a b* qui lui eſt égal *. * N°. 996.

Soit pris E H = S D ou *s d*, & par H ſoit mené H L parallele à la baſe F G; il faut démontrer qu'elle ſera égale à la circonference de la baſe du cone retranché S D C, ou ce qui eſt la même choſe, à l'arc *d c* du petit ſecteur *s d c*.

Pour cela, conſiderez qu'à cauſe des paralleles H L & F G, les triangles E F G, E H L ſont ſemblables, & qu'ils donnent E F. E H :: F G :: H L.

Conſiderez auſſi que les ſecteurs *s a b*, *s d c* ſont également ſemblables*, & qu'ils donnent *s a*. *s d* :: *a b*. *d c*: Or *s a* & *s d* ſont égales à E F & F H: Donc puiſque deux rapports égaux à un même rapport ſont égaux entr'eux* F G. H L :: *a b*. *d c*; mais F G = *a b* par la ſuppoſition: Donc H L = *d c* *: Donc le petit triangle E H L eſt égal à la ſuperficie du cone retranché S D C: Mais tout le triangle E F G eſt égal à la ſuperficie du cone entier: Donc ſi on retranche le triangle E H L, qui eſt égal à la partie tronquée du cone, il reſtera le trapeze H F G L égal à la ſuperficie du cone tronqué A C: Or, ce trapeze a pour côtés paralleles les circonferences des deux baſes du cone, & pour hauteur la partie de ſon côté, compriſe entre ſes deux baſes: Donc, &c. C. q. f. d. * N°. 837. * N°. 616. * N°. 486.

Premier Corollaire.

999. Il ſuit de cette propoſition, que pour avoir la ſuperficie d'un cone tronqué, il faut multiplier la moitié de la ſomme de la circonference de ſes deux baſes par le côté qui eſt entr'elles.

Car pour avoir la ſuperficie du trapeze égal au cone tronqué, il faut multiplier la moitié de ſes deux côtés paralleles par la perpendiculaire, qui eſt tirée

entre ces côtés * : Or, ſes deux côtés ſont les circonferences des deux baſes du cone tronqué, & cette perpendiculaire eſt la partie du côté du cone, compriſe entre ſes deux baſes: Donc, &c.

* N°. 435.

Si l'on ſuppoſe que le diametre D C de la baſe ſupérieure ſoit de 14 toiſes, & celui de l'inférieure AB de 21 toiſes, on trouvera la circonference de D C par cette Regle de Trois *. 7. 22 :: 14. $x = 44$. Et celle dont A B eſt le diametre par cette autre Regle de Trois 7. 22 :: 21. $x = 66$.

* N°. 448.

On ajoutera enſemble 44 & 66, dont la ſomme ſera 110 toiſes: On en prendra la moitié 55, qu'on multipliera par le côté A D du cone tronqué A C, le produit donnera la ſuperficie de ce cone: Ainſi, ſi on ſuppoſe A C de trente toiſes, on aura 1650 toiſes pour la ſuperficie de ce cone droit tronqué A C.

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

1000. La ſurface du cone droit tronqué eſt auſſi égale au produit d'une ligne moyenne arithmetique entre les deux circonferences de ſes baſes & de ſon côté.

Car on vient de voir que cette ſurface eſt égale à celui de la moitié des circonferences de ſes baſes par ſon côté: Or, la moitié de la ſomme de deux grandeurs differentes eſt moyenne arithmétique entre ces grandeurs *: Donc, &c.

* N°. 734.

THEOREME IV.

Pl. 13. Fig. 2, 3 & 4.

1001. *Si par le point M, milieu du côté A D du cone tronqué droit A C, on mene un plan M N, qui le coupe parallelement à ſa baſe, la ſection de ce plan avec la ſurface du cone, ſera moyenne arithmetique entre les circonferences de ſes deux baſes.*

DEMONSTRATION.

Soit la partie *a c* du ſecteur *a s b* égale à la ſuperficie du cone tronqué A C, & ſoit l'arc *m n* décrit du centre *s* par le point *m*, milieu de la ligne *d a*, qui eſt égale à D A; cet arc ſera évidemment égal à la circonference de la ſection M N.

Soit auſſi le trapeze H G égal à la partie *a c* du ſecteur *s a b*, ou à la ſurface du cone tronqué A C dans lequel ſoit mené par le point O, milieu de H F la ligne O R parallele à F G; on démontrera aiſément que O R eſt égale à l'arc *m n* du ſecteur, & par conſequent à la ſection du plan M N, de la même maniere qu'on a démontré dans la propoſition précedente que H L étoit égale à l'arc *d c* du petit ſecteur *s d c*: Ainſi, il ne s'agit plus que de faire voir que O R eſt moyenne arithmetique entre H L & F G.

Pour cela, menez par R la ligne P Q parallele à H F, terminée en P par le prolongement de H L; elle ſera coupée en deux également en R, à cauſe de la parallele O R qui coupe H F de cette maniere *: Ainſi P R = R Q. Les triangles L P R, Q R G ſont égaux; car ils ont pour baſes les lignes égales P R & R Q; les angles P R L & Q R G égaux, étant oppoſés au ſommet *, & les angles R P L, & R Q G auſſi égaux, parce qu'ils ſont alternes *: Donc ces deux triangles ſont égaux *: Donc les côtés L P & Q G oppoſés aux angles égaux dans ces triangles, ſont égaux.

* N°. 162.
* N°. 100.
* N°. 157.
* N°. 244.

Ainſi H L eſt plus petit que H P, qui eſt égale à O R, & à F Q, de la quantité L P = Q G: Donc H L differe de O R de la même quantité que O R differe de F G: Donc H L . O R :: O R . F G: Donc O R eſt moyenne arithmetique entre les deux côtés H L & F G du trapeze H F G L *: Mais O R eſt égale à la

* N°. 729.

circonference ou à la section M N, H L & F G, aux circonferences D C & A B : Donc la section M N est moyenne arithmetique entre les deux circonferences de la base du cone tronqué droit A C. C. q. f. d.

COROLLAIRE.

1002. Il suit de cette proposition, que la surface du cone tronqué droit étant égale au produit d'une ligne moyenne entre les deux circonferences de ses bases par son côté *, est aussi égale au produit de la circonference parallele à ses bases laquelle coupe son côté en deux également, par ce même côté ; puisque cette circonference est moyenne arithmetique entre celles des bases du cone tronqué droit.

* N°. 1000.

REMARQUE.

1003. Tout ce que l'on vient de dire sur la surface du cone tronqué droit servira de principe pour trouver la superficie de la sphere ; c'est pourquoi il faut s'attacher à le concevoir nettement, pour entendre ce qu'on expliquera sur la maniere de trouver cette superficie.

THEOREME V.

1004. *La surface de tout prisme droit est égale à un rectangle, qui a pour base la circonference de celle du prisme, & pour hauteur celle du même solide.*

Pl. 13. Fig. 5 & 6. Soit le prisme droit X dont la base est, par exemple, un exagone régulier ; il faut démontrer que sa superficie est égale au rectangle A C, qui a pour base la ligne A B égale à la circonference de la base de X, & pour hauteur celle du même solide.

DEMONSTRATION.

Considerez que tous les rectangles qui entourent

un prisme droit ont la même hauteur*, & qu'il y en a autant que la base a de côtés ; qu'ainsi si on les arrange immédiatement à côté les uns des autres sur la même ligne droite, comme en A C, ils formeront un seul rectangle A C qui aura pour base la somme de toutes leurs bases, ou ce qui est la même chose, la circonference de la base du prisme, & pour hauteur la hauteur commune de ces rectangles, qui est celle du prisme : Or, la somme de tous ces rectangles donne la superficie du prisme : Donc A C, qui est égal à cette somme, l'est aussi à la superficie du prisme : Donc, &c. *N°. 956.

COROLLAIRE.

1005. Il suit de cette proposition, que pour avoir la superficie d'un prisme droit, il faut multiplier la circonference de sa base par sa hauteur.

1006. Lorsque le prisme est oblique ; comme Y, il faut pour en avoir la superficie, trouver celle de chacun des parallelogrammes dont il est entouré ; la somme des superficies de ces figures donne celle du prisme. Ce qui est évident. Pl.13.Fig.7.

THEOREME VI.

1007. *La surface du cube droit & celle du parallelipipede aussi droit, est égale à un rectangle qui a pour base la circonference de la base de ces solides, & qui a la même hauteur.*

Ces solides sont des especes de prismes; c'est pourquoi cette proposition se démontrera de la même maniere que la précedente.

1008. Lorsque les cubes & les parallelipipedes seront obliques, on aura leur superficie, en ajoutant ensemble celle de tous les parallelogrammes dont ils sont entourés. Ce qui est évident.

THEOREME VII.

1009. *La ſurface d'un cylindre droit eſt égale à un rectangle, qui a pour baſe la circonference de la baſe du cylindre, & pour hauteur celle de ce ſolide.*

DEMONSTRATION.

Le cylindre droit peut être conſideré comme un priſme droit d'une infinité de côtés * : Or, la ſuperficie de ce priſme ſeroit égale à un rectangle qui auroit pour baſe la circonference de ſa baſe, & qui auroit auſſi la même hauteur * : Donc la ſuperficie du cylindre droit eſt auſſi égal à un pareil rectangle : Donc, &c.

* N°. 949.

* N°. 1004.

Pl. 13. Fig. 8. Autrement, ſuppoſez qu'on puiſſe enlever la ſuperficie du cylindre X, & en former une ſuperficie plane A B C D. Comme cette ſuperficie a par-tout la même hauteur, & que les deux lignes D C & A B qui la terminent en haut & en bas, ſont des lignes égales & paralleles, les deux autres lignes D A & C B ſont auſſi égales & paralleles * ; mais elles ſont perpendiculaires ſur A B ou D C, parce que tous les côtés du cylindre ſont perpendiculaires ſur la circonference de ſa baſe ; ce ſolide étant ſuppoſé droit : Donc A C eſt un rectangle égal à ſuperficie du cylindre X : Donc, &c.

* N. 163.

COROLLAIRE.

1010. Il ſuit de-là, que pour avoir la ſuperficie d'un cylindre droit X., il faut multiplier la circonference de ſa baſe par ſa hauteur.

Si le diametre A B de ſa baſe eſt de 15 toiſes, on trouvera ſa circonference par cette Regle de proportion $7 . 22 :: 15 . x = \frac{22 \times 15}{7} = 47\frac{1}{7}$.

Si

Si la hauteur A D ou B C eſt de 25 toiſes, on multipliera 47 $\frac{1}{7}$ par 25, & le produit 1178 $\frac{4}{7}$ ſera la ſuperficie de ce cylindre.

$$\begin{array}{r} 47\ \frac{1}{7}. \\ 25 \\ \hline 235 \\ 94. \\ \quad 3\ \ \frac{4}{7} \\ \hline 1178.\ \ \frac{4}{7}. \end{array}$$

REMARQUE.

1011. Lorſque le cylindre eſt oblique, il eſt évident que tous les petits parallelogrammes dont on conçoit que ſa ſuperficie eſt formée, ont alors des hauteurs inégales, & qu'ainſi ils ne ſont pas égaux à un ſeul parallelogramme qui auroit pour baſe la ſomme de leurs baſes, & pour hauteur celle du cylindre. Dans ce cas, on ne peut trouver ſa ſuperficie par la Géometrie élémentaire. *Ce n'eſt*, comme le dit un célebre Géometre (*a*), *que par des méthodes très-compliquées & très-difficiles, qu'on eſt parvenu à connoître ſeulement la valeur approchée de cette ſurface, & les Problêmes de ce genre ne ſont pas du reſſort des Elémens.*

LEMME *ou* PREPARATION POUR LA DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION SUIVANTE.

1012. Soit un demi-cercle A D B, dont le diametre eſt A B, & une ligne droite E G infiniment petite, ou ce qui eſt la même choſe, un arc qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe peut être pris pour une tangente, lequel touche le cercle dans ſon point-milieu F : Soit auſſi prolongé cette tangente & le diametre A B, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en P. Pl. 14. Fig. 1.

Soit tirée F K perpendiculaire à A B, de même que G M & E I : Soit élevé au point C le rayon C D auſſi

(*a*) M. *Clairaut*, *Elémens* de Géometrie.

perpendiculaire à AB, & ſoit mené DL parallele à AB, & terminée en L par le prolongement de GM: ſoit auſſi prolongé EI juſqu'en N, & enfin abbaiſſée GH perpendiculaire à NI.

Cette préparation étant faite, ſi l'on ſuppoſe que le demi-cercle ADB faſſe une circonvolution autour du diametre AB, il décrira une ſphere X, dont l'axe ſera ce même diametre AB. La petite tangente EG décrira la ſurface d'un cone tronqué droit, dont les lignes GM & EI qui ſont paralleles, ſont les rayons de ſes baſes, & FK celui de la circonference moyenne entre ces mêmes baſes. Ce cone tronqué ſera partie du cone droit que décrira EP. DL décrira un cylindre, dont la baſe ſera égale au grand cercle de la ſphere, cette baſe ayant pour rayon CD, qui eſt celui de la ſphere X. NL décrira auſſi un cylindre qui ſera une partie du précedent, lequel cylindre aura même baſe, parce que NI = DC, & qui aura pour hauteur LN ou GH, c'eſt-à-dire, la même hauteur que le cone tronqué décrit par EG, ainſi qu'on le voit dans la ſeconde figure de la *planche* 14. Cela poſé, il faut démontrer que

THEOREME VIII.

Pl.14. Fig.1. 1013. *La ſuperficie du cylindre droit décrit par LN, eſt égale à celle du cone tronqué auſſi droit décrit par EG.*

DEMONSTRATION.

Tirez FC, & prolongez FK en O: Conſiderez enſuite que les triangles FKC, EHG ſont ſemblables; car ils ont chacun un angle droit FKC, EHG; & l'angle FCK du premier égal à CEI du ſecond, parce que FCK a pour meſure l'arc FA*, & que GEI, qui eſt égal à GFK, à cauſe des paralleles FK

* N°. 83.

& E I *, a pour meſure le même arc F A ; G F K étant formé de la tangente F G ou F P,& de la corde F K ou F O : Donc il a pour meſure la moitié de l'arc F A O que ſoutient cette corde *, c'eſt-à-dire F A : Donc les deux triangles F K C, E H G ont deux angles égaux, chacun à chacun : Donc ils ſont ſemblables * : Donc F C hypoténuſe du premier, eſt E G hypoténuſe du ſecond, comme F K oppoſée à l'angle F C K du premier eſt à G H oppoſé à l'angle G E H du ſecond ; c'eſt-à-dire, que F C . G E : : F K . G H : D'où l'on a en permutant ou alternant * F C . F K : : G E . G H.

* N°. 153.
* N°. 196.
* N°. 774.
* N°. 676 & 681.

Préſentement ſi l'on nomme *c* la circonference qui a F C ou D C pour rayon, & *d* celle qui a F K, l'on pourra, dans la proportion ci-deſſus, mettre les circonferences décrites par ces rayons à la place des rayons, parce que ces circonferences ont entr'elles le même rapport * ; l'on aura alors *c*. *d* : : G E . G H ; & comme dans toute proportion le produit des termes extrêmes eſt égal à celui des moyens *, cette proportion donnera $c \times GH = d \times GE$, c'eſt-à-dire, que le produit la circonference du cercle qui a F C ou D C, ou ſon égale N I pour rayon par G H, ou ſon égale L N, eſt égal à celui de la circonference qui a F K pour rayon par le côté E G du cone tronqué décrit par E G : Or, le premier produit donne la ſurface du cylindre décrit par L N *, & le ſecond, celle du cone tronqué par E G * : Donc la ſurface de ce cone tronqué eſt égale à celle d'un cylindre qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere X, & pour hauteur celle du même cone tronqué. C. q. f. d.

* N°. 847.
* N°. 660.
* N°. 1009.
* N°. 1002.

THEOREME IX.

1014. *La ſurface de la ſphere eſt égale à celle d'un cylindre qui a pour baſe ſon grand cercle, & pour hauteur ſon diamètre.*

DEMONSTRATION.

Pl. 14. Fig. 3. Si l'on conſidere le demi-cercle A D B qui a décrit la ſphere X par ſa révolution autour de A B, comme un polygone d'une infinité de côtés S ; tous ces petits côtés décriront par le mouvement de ce demi-cercle une infinité de petits cones tronqués droits, dont la ſuperficie de chacun ſera égale à celle du petit cylindre correſpondant de même hauteur, & qui aura pour baſe le grand cercle de la ſphere. Suppoſant la hauteur de ces petits cones tronqués infiniment petite, ils ſe confondront avec la ſuperficie de la ſphere X, & ils formeront chacun une tranche infiniment mince de cette ſphere.

Si on ſuppoſe auſſi le rectangle A F qui a pour baſe F B = D C, rayon de la ſphere X, & pour hauteur F E = A B, & que ce rectangle ſe meuve ſur l'axe A B en même tems que le demi-cercle A D B, E F décrira un cylindre qui aura pour baſe un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre A B. Si l'on conçoit à préſent que toutes les petites tranches de la ſphere X, ou toutes les baſes des petits cones tronqués dont elle eſt compoſée, ſoient prolongées juſqu'en E F, le cylindre décrit par A F ſera partagé en autant de tranches infiniment minces *d e*, *d e*, &c. que la ſphere décrite par A D B : Mais par la propoſition précedente la ſurface de chaque tranche *s* de la ſphere eſt égale à celle du petit cylindre correſpondant *d d e e* : Donc la ſomme de la ſurface de toutes ces tranches ſera égale à celle de la ſurface

de tous les petits cylindres de même baſe & même hauteur décrits par F A : or la ſomme de la ſuperficie de tous ces petits cylindres donne la ſurface entiere du cylindre décrit par F A : Donc la ſurface de la ſphere eſt égale à celle de ce cylindre : Mais il a pour baſe le grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre : Donc, &c.

PREMIER COROLLAIRE.

1015. Il ſuit de cette propoſition, *que pour avoir la ſuperficie d'une ſphere, il faut multiplier la circonférence de ſon grand cercle par ſon diametre.*

Car pour avoir celle du cylindre dont la ſurface eſt égale à celle de la ſphere, il faut multiplier la circonférence du cercle de ſa baſe par ſa hauteur * : Or, le cercle de la baſe de ce cylindre eſt un grand cercle de la ſphere, & ſa hauteur en eſt le diametre : Donc, &c. * N°. 1009.

Si on ſuppoſe le diametre A B de 40 toiſes, on aura 125 toiſes $\frac{5}{7}$ pour ſa circonférence ; & ſi l'on multiplie cette circonférence pour le diametre 40, le produit 5028 toiſes quarrées & $\frac{4}{7}$ de toiſes, ſera la ſuperficie de la ſphere qui a 40 toiſes de diametre.

$$7.\ 22 :: 40.\ x = \frac{22 \times 40}{7} = 125\frac{5}{7}.$$

22		125 $\frac{5}{7}$
40		40
880	125 $\frac{5}{7}$	5000
7		*Pour* $\frac{1}{7}$ *de* 40 . . . . . 5 $\frac{7}{5}$
18		*Pour* $\frac{4}{7}$ . . . . . 22 $\frac{6}{7}$
7		5028 toiſ. $\frac{4}{7}$
40		
7		
Reſte 5.		

DEUXIE'ME COROLLAIRE.

1016. *Que la ſurface de la ſphere eſt quadruple de celle de ſon grand cercle.*

Car la ſurface de la ſphere eſt égale au produit de la circonférence de ſon grand cercle par ſon diametre, & celle du grand cercle eſt égale au produit de la même circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diametre * : Or, les produits qui ont des produiſans égaux, & d'autres inégaux, ſont entr'eux comme les inégaux * : Donc la ſuperficie de la ſphere eſt à celle de ſon grand cercle, comme le diametre eſt au quart du même diametre : Donc elle eſt quadruple de celle de ſon grand cercle. *C. Q. F. D.*

*N°.440.

*N°.854.

REMARQUE.

1017. Si l'on renferme une ſphere dans un cylindre qui ait pour baſe le grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre ; il eſt évident qu'elle touchera la ſurface de ce cylindre au milieu de ſa hauteur, & de plus le centre de chacune de ſes baſes : On dit qu'une ſphere ainſi renfermée dans un cylindre eſt *inſcrite* dans le cylindre, & que celui-ci eſt *circonſcrit* à la ſphere.

THÉOREME X.

1018. *La ſurface d'une zone eſt égale à celle d'un cylindre qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere, & pour hauteur celle de la zone, ou de la perpendiculaire tirée entre les deux cercles qui forment la zone.*

Pl.14.Fig.4. Soit la ſphere X, dont le diametre eſt A B, coupée par les deux plans paralleles C D, & E F, la ſuperficie de la ſphere compriſe entre ces deux plans, ou

ce qui eſt la même choſe, celle de la zone CEFD eſt égale à la ſuperficie du cylindre CH qui a pour baſe un grand cercle de la ſphere X, & pour hauteur GC ou MN, c'eſt-à-dire, la perpendiculaire tirée entre les plans paralleles CD & EF.

DEMONSTRATION.

Soit la ſphere X inſcrite dans le cylindre droit KP, dont le diametre KL de la baſe eſt égal au diametre AB de la ſphere X, & qui a pour hauteur OK = AB ou KL.

La ſuperficie de la ſphere X eſt égale à celle de ce cylindre; on l'a démontré en faiſant voir que chaque petite portion de la ſphere compriſe entre deux plans paralleles infiniment proches étoit égale à la ſuperficie de chaque petit cylindre de même hauteur, qui a pour baſe un grand cercle de la ſphere *; d'où il ſuit que la ſuperficie de tous les petits cones tronqués dont la ſuperficie de la zone CEFD eſt compoſée, eſt égale à celle de tous les petits cylindres correſpondans qui ont des baſes égales au grand cercle de la ſphere, ou à celle du cylindre total KP, & pour hauteur, la hauteur infiniment petite de ces petits cones; Mais la ſuperficie de tous ces cones tronqués eſt la même que celle de la zone CEFD, qui eſt auſſi égale à la ſuperficie de tous les cylindres correſpondans, c'eſt-à-dire, à celle du cylindre CH, qui a pour baſe un cercle de même diametre que la ſphere, & pour hauteur celle de la zone : Donc la ſuperficie d'une zone eſt égale à celle du cylindre qui a pour baſe un cercle de même diametre que la ſphere, & pour hauteur celle de la zone. C. q. f. d.

* N°. 1014.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition,

1019. *Que la ſurface d'un ſegment ou d'une calote ſpherique E F A, eſt égale à celle d'un cylindre droit qui a pour baſe un cercle de même diametre que la ſphere, & pour hauteur celle de la calote.*

Pl. 14. Fig. 4. Car puiſque la ſuperficie de la ſphere eſt égale à celle du cylindre dans lequel elle eſt inſcrite, & que celle de chaque zone eſt égale à la ſuperficie de la partie de ce cylindre, compriſe entre les deux cercles ou plans paralleles qui forment la zone; il s'enſuit que l'on a pour la ſuperficie du reſte de la ſphere, c'eſt-à dire, pour la calote E A F, la ſuperficie du cylindre G P compris entre la baſe E F de la calote prolongée en G & en H, & la baſe ſupérieure O P du cylindre total K P, c'eſt-à-dire, que cette ſuperficie eſt égale à celle d'un cylindre, qui a pour baſe un cercle de même diametre que la ſphere, & pour hauteur, la hauteur A M de la calote.

SECOND COROLLAIRE.

1020 *Que la ſuperficie des differentes ſections de la ſphere compriſes entre des cercles paralleles, ſont entr'elles comme les hauteurs de ces ſections.*

Car la ſuperficie de chacune de ces ſections eſt égale à celle du cylindre, qui a pour baſe un cercle de même diametre que celui de la ſphere, & pour hauteur celle de la ſection, ou ce qui eſt la même choſe, à un rectangle qui a pour baſe la circonference d'un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur celle de la ſection *. Tous les differens rectangles égaux aux ſections paralleles de la ſphere

* N°. 1018.

auront donc des baſes égales : Donc ils ſeront entr'eux comme leurs hauteurs * ; c'eſt-à-dire, comme celles des ſections de la ſphere. C. q. f. d. * N°. 777.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

Il ſuit encore de la même propoſition,

1021. *Que pour couper une ſphere par differens plans de maniere que la ſuperficie de ſes ſections ſoient en raiſon donnée*,

Il faut faire un cylindre dont le cercle de la baſe ait même diametre que celui de la ſphere, & qui ait auſſi pour hauteur ce diametre ; mettre enſuite la ſphere dans ce cylindre, dans lequel elle ſe trouvera inſcrite ; couper après cela la hauteur du même cylindre dans la raiſon donnée, & faire paſſer des plans paralleles à ſa baſe qui coupent auſſi la ſphere ; les ſurfaces des ſections compriſes entre ces plans, ſeront alors dans la raiſon donnée.

THEOREME XI.

1022. *La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de la ſphere.*

DEMONSTRATION.

Les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres * : Or, le cercle qui a pour rayon le diametre de la ſphere a un rayon double de celui du grand cercle de cette ſphere, & par conſequent ſa ſuperficie quadruple ; car ces ſuperficies ſont entr'elles comme le quarré de 2, qui eſt 4, eſt au quarré de 1 qui eſt 1 : Or la ſuperficie de la ſphere eſt auſſi quadruple de celle de ſon grand cercle * : Donc, &c. * N°. 860. * N°. 1016.

THEOREME XII.

1023. *Le quarré du diametre de la ſphere eſt à la ſuperficie de la ſphere, comme le même diametre eſt à la circonference du grand cercle.*

DEMONSTRATION.

Le quarré du diametre de la ſphere peut être regardé comme un rectangle qui a pour baſe, & pour hauteur le diametre de la ſphere; & la ſuperficie de cette ſphere comme un rectangle qui a pour baſe la circonference du grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre *. Ces deux rectangles ayant pour hauteur le même diametre, ſont entr'eux comme leurs baſes *, c'eſt-à-dire, comme le diametre de la ſphere eſt à la circonference de ſon grand cercle. C. q. f. d.

* N°. 1009.

* N°. 777.

COROLLAIRE.

1024. Il ſuit de-là, que puiſque le diametre eſt à ſa circonference, comme 7 eſt à 22, ou comme 113 eſt 355, le quarré du diametre de la ſphere eſt en nombres, à la ſuperficie de la même ſphere, comme 7 eſt à 22, ou comme 113 eſt 355.

THEOREME XIII.

1025. *La ſurface de la ſphere eſt à celle d'un cone droit, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre, comme ce diametre eſt à la moitié du côté du cone.*

DEMONSTRATION.

La ſurface de la ſphere eſt égale au produit de la circonference de ſon grand cercle par ſon diametre *, & celle du cone eſt égale au produit de la cir-

* N°. 1015.

conference de ſa baſe, qui par la ſuppoſition eſt la même que celle du grand cercle de la ſphere par la moitié de ſon côté *. Ces deux produits ont donc pour produiſans égaux la circonference du grand cercle de la ſphere, & pour inégaux, le diametre & la moitié du côté du cone: Donc ils ſont entr'eux comme ce diametre eſt à la moitié du côté de ce cone *: Donc, &c.

* N°. 996.

* N°. 854.

THEOREME XIV.

1026. *La ſurface entiere du cylindre, c'eſt-à-dire, en comprenant celle de ſes deux baſes, eſt à la ſuperficie de la ſphere inſcrite, comme 3 eſt à 2.*

Soit la ſphere X inſcrite dans le cylindre A B C D, il faut démontrer que la ſurface de ce cylindre, en comprenant celle de ces deux baſes A B & D C, eſt à celle de X, comme 3 eſt à 2, c'eſt-à-dire, qu'elle contient celle de la ſphere une fois & demie.

Pl. 14. Fig. 5.

DEMONSTRATION.

La ſurface de la ſphere X eſt égale à celle du cylindre A C, non compris ſes deux baſes *; chacune de ces baſes eſt égale au grand cercle de la ſphere X, qui eſt le quart de la ſuperficie de cette ſphere, puiſqu'on a démontré qu'elle en étoit quadruple *: Donc les deux baſes du cylindre A C, valent enſemble la moitié de la ſuperficie de la ſphere X, mais le reſte de la ſuperficie du cylindre, c'eſt-à-dire, la ſuperficie courbe dont il eſt entouré, eſt égale à la ſuperficie de la ſphere: Donc en lui ajoutant celle de ſes deux baſes, il contient une fois & demie la ſuperficie de la ſphere inſcrite X: Mais 3 contient auſſi une fois 2, & la moitié de 2: Donc la ſuperficie du cylindre entier A C, eſt celle de la ſphere inſcrite X, comme 3 eſt à 2. C. q. f. d.

* N°. 1014.

* N°. 1016.

REMARQUE.

1027. La raiſon de 3 à 2, ou celle dans laquelle l'antécedent contient une fois & demie ſon conſequent, eſt appellé ordinairement *ſeſquialtere* : Ainſi la ſurface entiere du cylindre eſt en raiſon ſeſquialtere à celle de la ſphere inſcrite.

V.

Du Rapport des ſurfaces des Solides ſemblables.

1028. LES Solides ſemblables ſont entourés de figures ſemblables qui ont leurs produiſans proportionnels *, & elles ſont entr'elles comme les quarrés de ces produiſans *, des côtés homologues, ou des lignes ſemblablement tirées : Donc les ſuperficies des ſolides ſemblables ſont auſſi entr'elles comme les quarrés de leurs produiſans, de leurs lignes ſemblablement tirées, &c.

*N°. 852.

*N°. 857.

1029. Les ſurfaces des cylindres ſont égales à des rectangles qui ont pour baſe la circonference du cercle de leur baſe, & pour hauteur celle du cylindre; mais lorſqu'ils ſont ſemblables, ces hauteurs ſont proportionnelles à ces circonferences : Donc leurs ſuperficies ſont entr'elles comme les quarrés des hauteurs, ou comme ceux des diametres des baſes. Il en eſt de même des pyramides & des cones ſemblables.

1030. Les ſuperficies des ſpheres ſont égales à des rectangles qui ont pour baſe la circonference de leur grand cercle, & pour hauteur leur diametre * :

*N°. 1015.

Mais ces circonferences & ces diametres ſont proportionnels * : Donc ces rectangles ſont ſemblables : Donc leurs ſuperficies, & par conſequent celles des ſpheres, auſquelles ils ſont égaux, ſont entr'elles comme les quarrés des hauteurs de ces rectangles, c'eſt-à-dire, comme ceux des diametres des ſpheres, &c. * Nº. 847.

Par conſequent la ſurface d'une ſphere qui a un pied de diametre, eſt à celle d'une autre ſphere qui en a trois, comme le quarré de 1 qui eſt 1, eſt au quarré de 3 qui eſt 9, c'eſt-à-dire, que la ſurface de celle d'un pied ne ſera que la neuviéme partie de la ſurface de la ſphere de trois pieds.

REMARQUE.

1031. On n'a point parlé juſqu'ici de la ſurface des cinq Corps réguliers ; mais comme ces corps ſont compoſés de ſurfaces régulieres égales, il eſt clair qu'il ne faut, pour avoir leur ſuperficie, que trouver celle d'une de leurs ſurfaces, & la multiplier enſuite par le nombre de celles qui terminent le corps.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE XII.

I.

De la Stéréometrie, ou meſure des Corps.

1032. LA STEREOMETRIE eſt la partie de la Géometrie qui traite de la ſolidité des corps ou de l'eſpace renfermé par leurs ſuperficies.

1033. Les Solides ſe meſurent avec d'autres ſolides plus petits, de même que les ſuperficies ſe meſurent avec d'autres ſuperficies auſſi plus petites : Or de la même maniere que la toiſe quarrée a été priſe pour meſurer les ſuperficies, la toiſe cube le ſera pour toiſer ou meſurer les ſolides.

1034. La *toiſe cube* eſt un cube terminé par ſix toiſes quarrées ; Le *pied cube* eſt un cube terminé par ſix pieds quarrés ; le *pouce cube* eſt de même un cube terminé par ſix pouces quarrés, &c.

Avant d'entrer dans le détail de la meſure des Corps, on établira quelques propoſitions qui en rendront le calcul plus aiſé & plus general.

1035. On appellera *Elémens* des ſolides des tranches d'une hauteur infiniment petite, formées par des coupes du ſolide, paralleles à ſa baſe.

1036. Il ſuit de cette définition, que les ſolides qui ſont également larges dans toute leur hauteur, comme les parallelipipedes, les priſmes & les cylindres ont tous leurs élémens égaux.

Car toutes leurs ſections paralleles à la baſe donnent des figures égales & ſemblables à leurs baſes *: Or, ces ſections peuvent être conſiderées comme des tranches d'une hauteur infiniment petite, c'eſt-à-dire, comme des élémens du ſolide : Donc puiſqu'elles ſont toutes égales, les élémens de ces ſolides ſont tous égaux. * N. 953.

1037. Le nombre des élémens des ſolides s'exprime par la perpendiculaire abbaiſſée de la baſe ſupérieure ſur l'inférieure, c'eſt-à-dire, par la hauteur du ſolide.

Car ſuppoſant cette hauteur partagée en parties infiniment petites, on ne peut concevoir de tranches ou de ſections dans le ſolide, qu'autant que cette hauteur contient de ces parties infiniment petites : Donc elle donne le nombre ou la ſomme des élémens du ſolide.

Il ſuit de-là,

1038. 1°. Que les ſolides qui ont leurs élémens égaux, chacun à chacun, & en pareil nombre, ſont égaux.

1039. 2°. Que les ſolides de même eſpece, comme les parallelipipedes, les priſmes & les cylindres qui ont des baſes égales & qui ſont renfermés entre

les mêmes plans paralleles, ou qui ont même hauteur, ſont égaux.

Car ces ſolides ont tous leurs élémens égaux à leur baſe *; ainſi ayant leurs baſes égales, tous leurs élémens ſont égaux: Il y en a auſſi également dans les uns & dans les autres, puiſque leur hauteur eſt la même: Donc ils ſont égaux entr'eux.

* N°. 953.

1040. 3°. Que les ſolides compoſés d'élémens égaux, ſont égaux, ſoit qu'ils ſoient droits ou obliques, pourvû qu'ils ayent des hauteurs égales. Ce qui eſt évident, puiſqu'alors ils contiennent le même nombre d'élémens égaux.

Ainſi un parallelipipede, par exemple, qui aura la ſuperficie de ſa baſe égale à celle d'un cylindre, & qui aura même hauteur que le cylindre, lui ſera égal. Il en ſera de même de tous les autres ſolides également larges dans toute leur élévation, qui auront des baſes & des hauteurs égales.

1041. 4°. Que pour avoir la ſolidité d'un parallelipipede, d'un priſme ou d'un cylindre, droit ou oblique, il faut multiplier la baſe du ſolide par ſa hauteur, ou ce qui eſt la même choſe, multiplier enſemble ſes trois dimenſions.

Car il eſt évident que la ſolidité d'un ſolide de cette eſpece eſt égale au nombre ou à la ſomme de ſes élémens: Or, il en a autant qu'on peut imaginer de points, ou de parties infiniment petites dans ſa hauteur: Donc ſa baſe ajoutée autant de fois à elle-même qu'il y a de points dans ſa hauteur, donne la ſolidité du ſolide ou la ſomme de ſes élémens.

Mais ajouter une grandeur à elle-même autant de fois qu'il y a de parties ou d'unités dans une ſeconde, c'eſt multiplier la premiere par la ſeconde: Donc le produit de la baſe par la hauteur donne la ſolidité du ſolide; mais pour avoir la ſurface de la

baſe,

baſe, il faut multiplier enſemble ſes deux produiſans, qui en ſont les deux dimenſions : Donc le ſolide eſt le produit de ſes trois dimenſions. C. q. f. d.

REMARQUE.

1042. On appellera dans la ſuite, *produiſans des ſolides*, les lignes qu'il faut multiplier enſemble pour en avoir la ſolidité ; de même qu'on a appellé produiſans des figures, les lignes qui étant multipliées enſemble en donnent la ſuperficie.

D'où il ſuit 1°. que les ſolides étant égaux au produit de leurs produiſans, ſont entr'eux comme ces produits, & qu'ainſi les parallelipipedes, les priſmes, & les cylindres qui ont des baſes égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs, ou comme leurs produiſans inégaux, & que ſi leurs hauteurs ſont égales, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, c'eſt-à-dire, auſſi comme leurs produiſans inégaux.

1043. 2°. Que lorſque ces ſolides ont même hauteur, & qu'ils ſont égaux, il faut néceſſairement que leurs baſes ſoient égales ; & de même que lorſque les baſes ſont égales, les hauteurs le ſont également.

1044. 3°. Que ceux de ces ſolides, qui ont leur baſe & leur hauteur réciproques à la baſe & à la hauteur d'un autre, ſont égaux.

Car ſoient, par exemple, les priſmes ou parallelipipedes X & Y, dont la baſe & la hauteur du premier ſont réciproques à la baſe & à la hauteur du ſecond, nommant A la baſe de X, & B celle de Y, & ſuppoſant que les hauteurs de ces ſolides ſoient C D & E F, l'on aura par la ſuppoſition A . B :: E F . C D . d'où l'on tire A × C D = B × E B * : Mais le premier produit eſt la ſolidité de X, & le ſecond celle de Y : Donc X = Y : Donc, &c. Pl. 14. Fig. 4. * N. 400.

THEOREME I.

1045. *Si l'on multiplie les toiſes quarrées de la baſe d'un parallelipipede droit par les toiſes lineaires de ſa hauteur, le produit donnera la quantité de toiſes cubes que contiendra le ſolide.*

Pl. 14 Fig. 7. Soit le parallelipipede droit A F, dont le côté D E du rectangle de ſa baſe (*a*) ſoit ſuppoſé, par exemple, de cinq toiſes, & l'autre côté D C de quatre. La ſuperficie de ce rectangle D F ſera de vingt toiſes quarrées.

Si on diviſe D F dans ſes vingt toiſes quarrées, par des paralleles menées aux côtés D E & D C, éloignées les unes des autres d'une toiſe; & ſi l'on imagine que par toutes ces paralleles il paſſe des plans perpendiculaires au rectangle D F qui joignent les deux baſes du ſolide A F; ils le partageront en autant de parallelipipedes qu'il y a de quarrés d'une toiſe dans D F, c'eſt-à-dire, dans cet exemple en vingt, qui auront chacun une toiſe quarrée pour baſe, & pour hauteur la ligne D A, qui eſt celle du parallelipipede A F; on ſuppoſe qu'elle eſt de ſept toiſes.

Si l'on imagine enſuite que par l'extrémité de chaque toiſe de D A, il paſſe des plans paralleles à la baſe de A F; il eſt évident qu'ils diviſeront chacun des 20 parallèlipipedes dont A F eſt compoſé, en ſolides qui auront une toiſe quarrée pour baſe, & une toiſe de hauteur, c'eſt-à-dire, en 7 toiſes cubes : Donc il y aura 20 fois autant de toiſes cubes dans tout le parallelipipede A F, qu'il y a de toiſes

(*a*) On ſe ſert ici de la baſe ſupérieure au lieu de l'inférieure, que la figure ne peut repréſenter auſſi nettement. On en a uſé de même dans la figure 6. de la même planche 14.

dans ſa hauteur, c'eſt-à-dire, qu'il y en aura vingt fois 7, ou 140 : Or, le produit de 20 par 7 donne la ſomme de 20 fois 7 : 20 eſt le nombre des toiſes quarrées de la baſe du parallelipipede, & 7 en eſt la hauteur : Donc le produit des toiſes quarrées de la baſe du parallelipipede par les toiſes de ſa hauteur donne le nombre de toiſes cubes qu'il contient, c'eſt-à-dire, ſa ſolidité. C. q. f. d.

REMARQUES.

I.

1046. Il eſt évident que ſi les trois dimenſions du parallelipipede au lieu d'avoir été diviſées en toiſes, l'avoient été en pieds, leur produit auroit donné des pieds cubes, & qu'il auroit donné des pouces cubes, ſi elles avoient été diviſées ou partagées en pouces, &c.

II.

1047. Que pour que le produit des dimenſions qu'on multiplie enſemble, donne des ſolides cubes, il faut qu'elles ſoient perpendiculaires les unes aux autres, c'eſt-à-dire, que la baſe du ſolide ſoit diviſée en quarrés, & que la ligne par laquelle on la multiplie lui ſoit perpendiculaire. Autrement en partageant un parallelipipede oblique en petits ſolides égaux, & également inclinés, comme on vient de partager le droit en cubes, on auroit ce ſolide diviſé en un certain nombre de petits ſolides égaux entr'eux, & également inclinés, qui ſeroient terminés par ſix toiſes quarrés ſi on avoit diviſé les dimenſions du ſolide en toiſes; mais comme alors les ſurfaces de ces ſolides ſeroient inclinées ſur leur baſe, leur hauteur ne ſeroit plus d'une toiſe, & comme leur ſolidité eſt le produit de la baſe par la hauteur *; * N. 1141.

il s'enſuit qu'ils ne vaudroient pas une toiſe cube, & qu'ils ſeroient d'autant plus petits que les ſurfaces envitonnantes ſeroient inclinées ſur la baſe : Donc ces petits ſolides ne ſeroient plus des cubes, puiſqu'ils ne ſeroient plus égaux au produit de trois dimenſions égales : Donc pour avoir en cubes les unités dans leſquelles on partage un ſolide, il faut que la ligne par laquelle on multiplie la ſurface de ſa baſe ſoit perpendiculaire à cette baſe.

III.

1048. Si les petits cubes obliques dans leſquels on peut partager un ſolide incliné, ne peuvent faire connoître ſa ſolidité, à moins qu'on ne ſçache quelle eſt leur inclinaiſon, parce qu'alors on peut parvenir à en déterminer la hauteur ; ils peuvent au moins dans des ſolides également inclinés, faire connoître quel eſt le rapport de leur ſolidité.

Pl. 15. Fig. 1. Car ſi l'on ſuppoſe deux parallelipipedes obliques X & Y également inclinés, dont le premier contienne, par exemple, 90 cubes obliques d'une toiſe, & le ſecond 146 des mêmes cubes ; il eſt évident que ces deux parallelipipedes étant égaux chacun au nombre des cubes inclinés qu'ils contiennent, ils ſont entr'eux comme le nombre de ces cubes, c'eſt-à-dire, que le premier X eſt au ſecond Y, comme 90 eſt à 146, ou en diviſant chacun de ces deux termes par 2, ce qui n'en change pas le rapport, comme 45 eſt à 73.

IV.

1049. Il faut obſerver auſſi que la toiſe cube contient 216 pieds cubes ; car diviſant la toiſe quarrée de ſa baſe dans les 36 piés quarrés qu'elle contient, il faudra, pour en avoir la ſolidité, multiplier ces

pieds ſuperficiels par la hauteur du cube, c'eſt-à-dire, par ſix pieds lineaires. Le produit donnera des pieds cubes; mais 6 multipliés par 36 donne 216: Donc la toiſe cube contient 216 pieds cubes.

1050. On trouvera de même que le pied cube contient 1728 pouces cubes; car le pied quarré contient 144 pouces quarrés, qui étant multipliés par les 12 pouces du pied lineaire, donnent des pouces cubes; mais 144 multiplié par 12 donne le produit 1728: Donc, &c.

1051. Le pouce cube contient auſſi 1728 lignes cubes; car il eſt égal au produit de 144 lignes quarrées par 12 lignes lineaires.

1052. On trouvera de la même maniere les autres unités cubes dans leſquelles on voudra partager un cube, c'eſt-à-dire, en multipliant ces unités quarrées de ſa baſe par les mêmes unités lineaires de ſa hauteur.

V.

1053. On a vû que la toiſe quarrée ſe diviſe comme la toiſe lineaire en ſix parties égales, appellées pieds courant ſur toiſe, qui ſont des rectangles d'une toiſe, ou de ſix pieds de longueur ſur un pied de hauteur *. On diviſe de même la toiſe cube en ſix parties égales, qu'on peut appeller chacune *pied cube courant ſur toiſe*. C'eſt un parallelipipede qui a pour baſe une toiſe, & pour hauteur un pied lineaire: Ainſi le pied cube courant ſur toiſe, contient 36 pieds cubes, ou la ſixiéme partie des 216 pieds de la toiſe cube.

* Nº. 406, & ſuivans.

Le pied cube ſe diviſe auſſi en douze pouces cubes courant ſur toiſe. Ce ſont des parallelipipedes qui ont une toiſe quarrée pour baſe, & pour hauteur un pouce lineaire: Ainſi chaque pouce cube

courant ſur toiſe contient autant de pouces cubes qu'il y a de pouces quarrées dans la toiſe quarrée.

La ligne cube courant ſur toiſe eſt de même un parallelipipede qui a pour baſe une toiſe quarrée, & pour hauteur une ligne lineaire.

V I.

1054. Les diviſions de la toiſe cube dans le même nombre de parties égales que la toiſe lineaire, donnent le moyen de calculer les ſolides auſſi facilement que les grandeurs lineaires & les ſuperficielles. On va en donner un exemple dans le toiſé du parallelipipede ; il ſervira de modele pour le calcul des autres ſolides.

Pl. 15. Fig. 2. 1055. Soit le parallelipipede droit E C, dont la baſe ſupérieure A C, qui eſt égale à ſon inférieure, a le côté D C de quatre toiſes quatre pieds, & le côté A D qui lui eſt perpendiculaire, de trois toiſes trois pieds.

D C = 4 toiſes 4 pieds
A D = 3 — 3

12

Pour les 3 pieds du Multiplicateur 2
Pour 3 pieds du Multiplicande . 1 — 4 — 6
Pour un pied du Multiplicande . 0 3 — 6

Superficie de A C = 16 toiſes 2 pieds
A E = 6 — 3

96

Pour les 3 pieds du Multiplicateur 8
Pour les 2 pieds du Multiplicande 2 — 1

Solidité de E C = 106 toiſes 1 pieds.

En pratiquant ce qui a été expliqué N. 413. pour le calcul des ſuperficies, on aura 16 toiſes quarrées, plus 2 pieds courant ſur toiſe pour la ſuperficie du rectangle AC. Il s'agit, pour avoir la ſolidité de EC, de multiplier le produit de ſa baſe AC par la hauteur AE de ce ſolide. On la ſuppoſe de ſix toiſes trois pieds.

On multipliera d'abord les 16 toiſes du multiplicande par les ſix toiſes du multiplicateur, ce qui n'a aucune difficulté.

Pour les trois pieds du multiplicateur, on prendra la moitié des 16 toiſes du multiplicande. Car ſoit AH de 3 pieds; il eſt évident qu'en multipliant le rectangle AC par une toiſe lineaire, on auroit autant de toiſes cubes au produit qu'il contiendroit de toiſes quarrées: Or en le multipliant par 3 pieds, on a un ſolide une fois plus petit qu'en le multipliant par ſix pieds: Donc ce ſolide eſt égale à la moitié des 16 toiſes du multiplicateur AC, c'eſt-à-dire, qu'il eſt de huit toiſes cubes.

Il reſte à multiplier les deux pieds courant ſur toiſe du multiplicande AC par tout le multiplicateur AE.

Pour cela, il faut conſiderer que ſi au lieu de 2 pieds courant ſur toiſe, c'eſt-à-dire, au lieu du tiers de la toiſe quarrée, on avoit cette toiſe entiere à multiplier par 6 toiſes 3 pieds, on auroit pour le produit 6 toiſes 3 pieds cubes courant ſur toiſes; car on auroit alors un parallelipipede d'une toiſe quarrée de baſe, & de 6 toiſes & demie de hauteur qui contiendroit évidemment 6 toiſes & 3 pieds cubes courant ſur toiſe, qui valent la moitié d'une toiſe cube. Cela bien obſervé, il s'enſuit que puiſque 2 pieds courant ſur toiſe ſont le tiers de la toiſe, le parallelipipede formé de leur produit par les 6 toiſes

THEOREME II.

1057. *Les pyramides & les cones qui ont des baſes & des hauteurs égales, ou qui ayant des baſes égales, ſont renfermés entre les mêmes plans paralleles, ſont égaux.*

Soient la pyramide X & le cone Y renfermés entre les mêmes plans paralleles AB, CD, & dont les baſes X & Y ſont égales, il faut démontrer que la pyramide X eſt égale au cone Y. Pl. 15. Fig. 3.

Pour cela, il eſt clair qu'il faut démontrer qu'ils contiennent le même nombre d'élémens égaux, chacun à chacun. Pour le même nombre d'élémens, la propoſition eſt évidente, puiſque ces deux ſolides ont la même hauteur : Ainſi il reſte ſeulement à démontrer que chaque élément de la pyramide eſt égal à chaque élément correſpondant du cone.

DEMONSTRATION.

Soient la pyramide X & le cone Y coupés par le plan EF parallele à celui de leurs baſes AB. On a démontré que la ſection ou la tranche x de la pyramide par ce plan, étoit un polygone ſemblable à celui de ſa baſe X; comme la ſection y du cone eſt auſſi un cercle, & par conſéquent une figure auſſi ſemblable à la baſe du cone Y *. *N°. 931 & 979.

La ſection x & la baſe X de la pyramide étant des figures ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues * ; c'eſt-à-dire, que * N° 857.

$$X . x :: \overline{GH}^2 . \overline{gh}^2 .$$

Par la même raiſon Y & y, ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs diametres LM & lm,

$$\& \text{ ils donnent de même } Y . y :: \overline{LM}^2 . \overline{lm}^2 .$$

Les triangles I G H, I gh étant ſemblables à cauſe de la parallele gh, donnent G I . gI :: G H . gh ; & les ſemblables L K M, lK m donnent L K . lK :: L M . lm. Mais à cauſe que les lignes G I & L K qui ſont renfermées entre les mêmes plans paralleles A B & C D, ſont coupées par un troiſiéme E F parallele aux deux premiers, elles ſont coupées proportionnellement * : enſorte que le rapport de G I à gI, eſt égal à celui de L K à lK : Donc le rapport de G H à gh, & celui de L M à lm, qui ſont égaux à des rapports égaux, ſont égaux entr'eux * : Donc G H . gh :: L M . lm, ou en permutant G H . L M :: gh . lm. Mais ces quatre grandeurs étant proportionnelles, leurs quarrés le ſont auſſi * : Ainſi l'on a G H . L M :: gh . lm : Or, ſi à la place de ces quarrés on met les figures ſemblables qui ſont en même raiſon *, l'on aura X . Y : x . y. Mais les deux termes X & Y du premier rapport ſont égaux, par la ſuppoſition : Donc les termes du ſecond, le ſont auſſi *, c'eſt-à-dire, que $x = y$. Ainſi l'élément x de la pyramide eſt égal à l'élément correſpondant y du cone ; & comme il eſt évident qu'on peut démontrer de la même maniere l'égalité de tous les élémens de la pyramide avec les élémens correſpondans du cone ; il s'enſuit que la pyramide & le cone ſont compoſés de même nombre d'élémens égaux, chacun à chacun : Donc les pyramides & les cones de baſes & de hauteurs égales, ſont égaux. C. q. f. d.

* N°. 916.

* N°. 616.

* N°. 689.

* N°. 857.

* N°. 687.

REMARQUE.

1058. Il eſt évident que la démonſtration de la propoſition précedente peut s'appliquer également à toutes les pyramides qui ont des baſes & des hau-

teurs égales, & à tous les cones qui ayant des baſes égales, ont auſſi la même hauteur : D'où il ſuit,

1059. 1°. *Que toutes les pyramides qui ont des baſes des hauteurs égales, ſont égales.*

1060. 2°. *Que tous les cones qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont égaux.*

1061. *Et que ſi des pyramides ou des cones égaux ont des hauteurs égales, leurs baſes ſeront auſſi égales.*

THEOREME III.

1062. *Si l'on coupe un parallelipipede X par un plan AD qui paſſe par les diagonales AB, CD de ſes baſes FE, GH, il ſera partagé en deux priſmes triangulaires égaux.*

DEMONSTRATION.

Les diagonales AB & CD partagent les deux baſes FE, GH du parallelipipede X en deux triangles égaux*, & comme la baſe ſupérieure EF eſt égale & parallele à l'inférieure GH, il s'enſuit que les deux ſolides dans leſquels le parallelipipede X eſt diviſé, ſont deux priſmes triangulaires qui ont des baſes égales, & des hauteurs auſſi égales, puiſqu'ils ont la même hauteur que le ſolide X : Donc ils ſont égaux. C. q. f. d. Pl. 15. Fig. 4. * N°. 300.

THEOREME IV.

1063. *Tout priſme polygone peut ſe partager en pluſieurs priſmes triangulaires.*

Cette propoſition eſt évidente ; car tout polygone peut ſe partager en triangles : Or, ſi l'on fait paſſer des plans par les côtés des triangles de la baſe ſupérieure

& de l'inférieure, enſorte que ces plans joignent les triangles oppoſés dans ces baſes; il eſt clair que ces plans diviſeront le priſme propoſé en autant de priſmes triangulaires qu'on aura formé de triangles dans chacune de ſes baſes.

THEOREME V.

1064. *Tout priſme triangulaire peut être partagé en trois pyramides triangulaires égales.*

Soit le priſme triangulaire V, il faut démontrer qu'il peut être partagé en trois pyramides triangulaires égales.

DEMONSTRATION.

Pl. 15. Fig. 5 & 6. Soit imaginé un plan A B F qui paſſe par le côté A B de la baſe inférieure du priſme, & par le point F de la ſupérieure. Il retranchera du priſme V la pyramide X, qui a pour baſe le triangle A B C, c'eſt-à-dire, la baſe du priſme, & pour hauteur, celle du même ſolide, le ſommet F de cette pyramide étant un point de la baſe ſupérieure du priſme.

Si par le point A de la baſe inférieure, & par le côté E F de la ſupérieure, on fait auſſi paſſer un plan A E F, il partagera le reſte du priſme en deux pyramides triangulaires égales Y & Z; je dis égales, parce qu'elles ont chacune pour baſe la moitié du parallelogramme A B E D; attendu que le plan coupant A E F paſſe par la diagonale de ce parallelogramme; elles ont auſſi la même hauteur, puiſque le ſommet de chacune eſt au même point F de la baſe ſupérieure du priſme : Ainſi Y = Z.

Si l'on compare préſentement la pyramide X avec la pyramide Y, on trouvera de même que ces deux pyramides ont chacune pour baſe la moitié du pa-

rallelogramme BCEF, puiſque le plan coupant ABF paſſe par ſa diagonale BF, & qu'elles ont auſſi même hauteur, le ſommet de l'une & de l'autre étant au même point A : Donc la pyramide X eſt égale à la pyramide Y ; mais cette même pyramide Y eſt égale à la pyramide Z : Donc ces trois pyramides X, Y & Z ſont égales entr'elles : Donc tout priſme triangulaire peut ſe partager en trois pyramides triangulaires égales. C. q. f. d.

REMARQUE.

1065. Comme les differentes ſections du priſme triangulaire dont on vient de parler, peuvent avoir quelque difficultés pour être conçues diſtinctement ſur le papier, on conſeille aux commençans, de faire faire, ou de faire le priſme triangulaire en relief, c'eſt-à-dire, de le conſtruire en élévation avec toutes ſes dimenſions, & de le faire de matiere convenable pour qu'il puiſſe être coupé ſelon les ſections qu'on vient d'expliquer. Alors on verra clairement qu'en comparant deux à deux les trois pyramides que ces ſections donneront, elles auront des baſes & des hauteurs égales, & qu'ainſi elles ſont égales entr'elles.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de la propoſition précedente,

1066. *Que chacune des pyramides triangulaires X, Y & Z, eſt le tiers du priſme triangulaire V.* Pl. 15. Fig. 5 & 6.

SECOND COROLLAIRE.

1067. *Que toute pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur.*

Car les pyramides X & Z ont chacune pour baſe

des triangles égaux aux baſes du priſme, & elles ont même hauteur que ce ſolide : Or, on vient de voir qu'elles n'en ſont que le tiers : Donc, &c.

THEOREME VI.

1068. *Toute pyramide polygone peut ſe partager en autant de pyramides triangulaires qu'on peut faire de triangles dans ſa baſe.*

Pl. 15. Fig. 7. Cette propoſition eſt évidente ; car ſi l'on a la pyramide pentagone X dans la baſe ſoit partagée en triangles, & qu'on imagine des plans qui paſſent par le ſommet de cette pyramide, & par les côtés des triangles de ſa baſe, elle ſera partagée en autant de pyramides triangulaires, qu'il y aura de triangles dans ſa baſe : Donc, &c.

PREMIER COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition,

1069. 1°. *Que toute pyramide polygone eſt le tiers d'un priſme qui auroit pour baſe le même polygone, & la même hauteur que la pyramide.*

Car le priſme ayant pour baſe le même polygone que la pyramide, il pourra être diviſé en autant de priſmes triangulaires que ſa baſe contiendra de triangles ; mais la baſe de la pyramide contenant autant de triangles égaux que celle du priſme, cette pyramide pourra être diviſée en autant de pyramides triangulaires que le priſme polygone contiendra de priſmes triangulaires ; chaque pyramide triangulaire ſera le tiers du priſme triangulaire correſpondant de même baſe & de même hauteur * : Donc toutes les parties de la pyramide polygone ſeront le tiers de toutes celles du priſme polygone : Donc la

* N°. 1067

pyramide eſt le tiers du priſme : Donc, &c.

Soient, par exemple, la pyramide & le priſme pentagone X & Y, dont les baſes & les hauteurs ſont égales, ſi d'un angle E de la circonference de la baſe de la pyramide on tire les lignes E B, E C, elle ſera partagée en trois triangles, & tirant de même dans les baſes du priſme Y les mêmes lignes, elles ſeront auſſi partagées en trois triangles égaux à ceux de la baſe de Y. Cela fait, imaginant des lignes ou des plans qui paſſent par le ſommet O de la pyramide, & par les diviſions de ſa baſe, elle ſera diviſée en trois pyramides triangulaires. Concevant auſſi des plans qui joignent les diviſions des baſes du priſme, il ſera partagé en trois priſmes triangulaires : Or, chaque pyramide triangulaire eſt le tiers du priſme triangulaire de même baſe & même hauteur qui lui correſpond : Donc toutes les trois parties de X ſont chacune le tiers des trois parties de Y : Donc X eſt le tiers de Y : Donc, &c. Pl. 15. Fig. 7 & 8.

Deuxie'me Corollaire.

1070. 2°. *Qu'un cone eſt le tiers d'un cylindre de même baſe & de même hauteur.*

Car le cone peut être conſideré comme une pyramide d'une infinité de côtés, & le cylindre comme un priſme d'un même nombre de côtés : Or, toute pyramide eſt le tiers d'un priſme de même hauteur & de baſe égale : Donc tout cone eſt le tiers d'un cylindre de même baſe & de même hauteur.

Troisie'me Corollaire.

1071. 3°. *Que la ſolidité de la pyramide, de même que celle du cone, eſt égale au produit de la baſe de l'un ou l'autre ſolide par le tiers de ſa hauteur.*

Car pour avoir la ſolidité du priſme ou du cy-

lindre de même baſe & de même hauteur que la pyramide ou le cone, il faut multiplier la baſe de ces
*N. 1041. ſolides par leur hauteur *; mais puiſque la pyramide & le cone ne ſont que le tiers du priſme ou du cylindre de même baſe & même hauteur, leur ſolidité eſt le tiers de celle de ces ſolides: Or, en multipliant les mêmes baſes par le tiers de la hauteur des ſolides, le produit n'eſt que le tiers de celui qu'on auroit en multipliant ces baſes par la hauteur entiere: Donc, &c.

THEOREME VII.

1072. *Les pyramides ou les cones qui ont des baſes égales, ſont entr'eux comme leur hauteur, & s'ils ont des hauteurs égales, ils ſont entr'eux comme leurs baſes.*

DEMONSTRATION.

Les priſmes & les cylindres de même baſe ſont
*N. 1042. entr'eux comme leur hauteur *: Or, les pyramides & les cones qui ſont les tiers de ces ſolides ſont en
*N. 621. même raiſon que leurs Touts *, qui ſont les priſmes & les cylindres de même baſe & de même hauteur: Donc, &c.

THEOREME VIII.

1073. *Les pyramides & les cones, dont les baſes & les hauteurs ſont réciproques, ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

Pl. 16. Fig. 1. Soient les pyramides X & Y dont la baſe de la premiere eſt C, & ſa hauteur AC; celle de la ſeconde D, & ſa hauteur BD. Ces deux pyramides ayant leurs baſes & leurs hauteurs réciproques, l'on a
*N°. 662. C. D :: DB. AC. *; d'où l'on tire avec le produit des extrêmes & celui des moyens C×AC=D×DB:

C

Or, le produit de la baſe C de la pyramide X par ſa hauteur A C, eſt triple de la valeur de cette pyramide, de même que celui de la baſe D de la ſeconde par ſa hauteur D B : Mais ces deux produits étant égaux, leurs tiers le ſeront auſſi * : Or, ces tiers ſont les valeurs des deux pyramides X & Y qui ont chacune leur baſe & leur hauteur réciproque : Donc, &c.

* N°. 623.

THEOREME IX.

1074. *La ſphere eſt égale à une pyramide ou à un cone, qui a pour baſe ſa ſuperficie, & pour hauteur ſon rayon.*

DEMONSTRATION.

Soit la ſphere X, dont le rayon eſt B C. On peut la concevoir comme compoſée d'une infinité de petites pyramides qui ont toutes leur ſommet au centre C, & dont les baſes, en les ſuppoſant infiniment petites, peuvent être conſiderées comme des ſuperficies planes, qui toutes enſemble forment la ſuperficie de la ſphere. Toutes ces petites pyramides ont pour hauteur commune le rayon B C qui eſt perpendiculaire ſur tous les points de la ſurface de la ſphere, donc elles ont la même hauteur : Ainſi, ſi on ſuppoſe qu'il y ait, par exemple, 1000000 de ces petites pyramides dans la ſphere X, une pyramide qui auroit ſa baſe 1000000 fois plus grande qu'une de ſes petites pyramides B C, les contiendroit toutes ; car ayant même hauteur, elles ſeroient entr'elles comme leurs baſes * : Or, celle de la premiere pyramide eſt ſuppoſée avoir une baſe 1000000 fois plus grande que la ſeconde : Donc elle ſera 1000000 fois plus grande que cette ſeconde : Mais la ſphere eſt auſſi 1000000 fois plus grande que cette ſeconde pyramide : Donc elle ſera égale à la premiere, c'eſt-

Pl. 16. Fig. 2.

* N°. 1072.

à-dire, à la pyramide qui aura pour baſe ſa ſuperficie, & pour hauteur ſon rayon : Donc, &c.

COROLLAIRE.

1075. Il ſuit de cette propoſition, que pour avoir la ſolidité d'une ſphere, il faut multiplier ſa ſuperficie par le tiers de ſon rayon.

Car pour avoir la valeur de la pyramide égale à la ſphere, il faut multiplier la ſurface de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur *; mais la baſe de cette pyramide eſt la ſurface de la ſphere, & ſa hauteur en eſt le rayon : Donc, &c.

* N°. 1071.

THEOREME X.

1076. *La ſphere eſt au cylindre circonſcrit, comme 2 eſt à 3.*

Soit la ſphere X inſcrite dans le cylindre CE, qui par conſéquent lui eſt circonſcrit; il faut démontrer que ſa ſolidité eſt à celle de ce cylindre, comme 2 eſt à 3.

Pl. 16. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Soit appellé *a* le rayon de la ſphere X, l'on aura auſſi le rayon FA ou CB de la baſe du cylindre qui lui eſt égal, repréſenté par la même quantité *a*.

Soit la circonference du grand cercle de la ſphere, nommée *c*, celle de la baſe du cylindre, qui lui eſt pareillement égale, ſera donc auſſi déſignée par la même lettre *c*.

Cela poſé, la ſuperficie de la ſphere eſt le produit de la circonference *c* de ſon grand cercle par ſon diamètre AB *; la valeur de AB doit être exprimée par 2*a*, puiſque le rayon, qui en eſt la moitié, eſt appellé *a*: Or 2*a*, multiplié par *c*, donne pour la

* N°. 1015.

ſuperficie de la ſphere le produit $2ac$ *, lequel multiplié par le tiers du rayon, donnera la ſolidité de la ſphere *. Multipliant ce produit $2ac$ par a, diviſé par 3 ou par $\frac{a}{3}$, on aura $\frac{2aac}{3}$ pour la ſolidité de la ſphere, c'eſt-à-dire, les deux tiers de aac; car aac diviſé par 3 ou $\frac{aac}{3}$, exprime le tiers ou la troiſiéme partie de aac *: Donc $\frac{2aac}{3}$ qui vaut $\frac{aac}{3}$ $+\frac{aac}{3}$ exprime les deux tiers de aac.

* N°. 580.

* N°. 1075.

* N°. 581.

Préſentement pour avoir la ſolidité du cylindre CE, il faut trouver d'abord la ſuperficie de ſa baſe, ce qu'on aura en multipliant ſa circonference c par la moitié du rayon CB *, c'eſt-à-dire, par $\frac{a}{2}$, & le produit ſera $\frac{ac}{2}$ qu'il faut multiplier par la hauteur du cylindre ou le diametre de la ſphere, qui eſt $2a$; ce qui donnera pour cette ſolidité $\frac{2aac}{2}$: Or $\frac{aac}{2}$ eſt la moitié de aac: Donc $\frac{2aac}{2}$ ſont les deux moitiés du même produit aac: deux moitiés valent le tout: Donc $\frac{2aac}{2} = aac$: Ainſi aac eſt l'expreſſion de la ſolidité du cylindre circonſcrit: Mais $\frac{2aac}{3}$ eſt celle de la ſolidité de la ſphere inſcrite, & cette quantité ou ce produit eſt les deux tiers de aac: Donc la ſphere eſt les deux tiers du cylindre circonſcrit: Or 2 eſt auſſi les deux tiers de trois: Donc la ſphere qui eſt les deux tiers du cylindre circonſcrit, eſt à ce cylindre, comme 2 eſt à 3. C. q. f. d.

* N°. 440.

COROLLAIRE.

1077. Il ſuit de cette propoſition, que la ſolidité de la ſphere eſt à celle du cylindre circonſcrit, comme ſa ſuperficie eſt à celle de ce cylindre, y compris celle de ſes baſes; puiſque cette ſuperficie eſt auſſi à celle de ce cylindre, comme 2 eſt à 3 *.

* N°. 1026.

THEOREME XI.

1078. *La ſolidité de la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme la ſixiéme partie de la circonference de ſon grand cercle eſt à ſon diametre.*

Pl. 16. Fig. 4. Soit la ſphere X dont le diametre eſt A B, la circonference A D B E A, & Y un cube qui a pour côté le diametre A B; il faut démontrer que X. Y :: $\frac{ADBEA}{6}$. A B.

DEMONSTRATION.

Soit le diametre A B appellé a, & c la circonference de ſon cercle; l'on aura pour la ſuperficie de la ſphere X, a multiplié par c*, c'eſt-à-dire ac. Pour en avoir la ſolidité, il faut multiplier ce produit par le tiers du rayon C B *, ou ce qui eſt la même choſe, par la ſixiéme partie de A B, ou par $\frac{a}{6}$, ce qui donne $\frac{aac}{6}$ pour la ſolidité de la ſphere X.

* N°. 1015.

* N°. 1075.

Pour avoir le cube de A B $=a$, il faut d'abord le quarrer, ce qui donne aa, & multiplier enſuite ce quarré par a, & l'on aura aaa pour le cube de a:: Ainſi X. Y :: $\frac{aac}{6}$. aaa: Or, ſi l'on diviſe les deux ter nes du dernier rapport par aa, ou ce qui eſt

la même choſe, ſi l'on ôte *a a* de chacun, on ne changera pas leur rapport *, & il ſera alors exprimé par * N°. 624.
$\frac{c}{6}$ & *a* : Ainſi X. Y :: $\frac{c}{6}$. *a*: Mais $\frac{c}{6}$ repréſente la ſixiéme partie de la circonference de la ſphere, & *a* en eſt le diametre : Donc la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme la ſixiéme partie de la circonference de ſon grand cercle eſt à ſon diametre. C. q. f. d.

1079. Si on ſuppoſe, avec *Archiméde*, que la circonference du cercle ſoit à ſon diametre, comme 22 eſt à 7, la ſolidité de la ſphere ſera en nombres au cube de ſon diametre, comme la ſixiéme partie de 22 ou $\frac{22}{6}$ eſt à 7. Ou ſi pour éviter les fractions on multiplie 22, & 7 par 3, on n'en changera pas le rapport *, & l'on aura alors le rapport de la circonference à ſon diametre exprimé par 66 & 21 : Or, la ſixiéme partie de 66 eſt 11 : Donc ſuivant *Archiméde*, la ſolidité de la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme 11 eſt à 21. * N°. 624.

THEOREME XII.

1080. *Le cylindre circonſcrit à la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme le quart de la circonference du grand cercle de la ſphere eſt à ſon diametre.*

Soit le cylindre C E circonſcrit à la ſphere X dont le diametre eſt A B; il faut démontrer que ſa ſolidité eſt à celle du cube de A B, comme le quart de la circonference du grand cercle de X eſt à ſon diametre, c'eſt-à-dire, en nommant *a* le diametre A B, & *c* la circonference de ſon cercle que X . $\overline{\text{A B}}^3$ :: $\frac{c}{4}$. *a*. Pl. 16. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Le diametre de la baſe du cylindre C E étant égal

à celui de la ſphere X, ſera auſſi exprimé par a, & par conſequent la circonference de cette baſe par c, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt la même que celle du grand cercle de la ſphere X. La ſuperficie de la baſe de ce cylindre ſera le produit de ſa circonference par le quart de ſon diametre *, c'eſt-à-dire, celui de c par $\frac{a}{4}$, ce qui donne $\frac{ac}{4}$, & multipliant ce produit par la hauteur du cylindre, qui eſt la même que le diametre de la ſphere, l'on aura ſa ſolidité exprimée par $\frac{aac}{4}$. celle du cube de A B le ſera par aaa: Ainſi C E. $\overline{\text{A B}}^{3}$:: $\frac{aac}{4}$. aaa. Mais diviſant chacun des termes du dernier rapport par aa, on ne changera rien à leur rapport *, & on aura alors C E. $\overline{\text{A B}}^{3}$:: $\frac{c}{4}$. a: Or $\frac{c}{4}$ eſt le quart de la circonference, & a en eſt le diametre: Donc le cylindre C E circonſcrit, eſt au cube du diametre de la ſphere, comme le quart de la circonference du grand cercle de la ſphere eſt à ſon diametre. C. q. f. d.

* N°. 440.

* N°. 624.

COROLLAIRE.

1081. Il ſuit de cette propoſition, *que le cylindre circonſcrit eſt au cube du diametre de la ſphere inſcrite, comme la ſuperficie du grand cercle de la ſphere eſt au quarré de ſon diametre.*

Car on a démontré que la ſuperficie de tout cercle étoit au quarré de ſon diametre, comme le quart de ſa circonference étoit au même diametre *: D'où il ſuit que, ſuivant *Archiméde*, le cylindre circonſcrit eſt, en nombres, au cube du diametre de la ſphere, inſcrite comme 11 eſt à 14.

* N°. 871.

THEOREME XIII.

1082. *Les cinq corps réguliers ſont égaux chacun à une pyramide droite qui a pour baſe la ſuperficie du corps, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du centre de la ſphere dans lequel il eſt inſcrit, ſur une des ſuperficies qui le terminent.*

DEMONSTRATION.

Cette propoſition eſt évidente ; car concevant que du centre de la ſphere circonſcrite on tire des lignes à tous les angles ſolides du corps, il ſera diviſé en autant de pyramides droites qu'il a de ſurfaces ; ces pyramides auront toutes la même hauteur : Donc elles ſeront égales à une pyramide qui auroit cette même hauteur : & pour baſe la ſomme de toutes les baſes de ces pyramides, c'eſt-à-dire, la ſurface du corps : Donc, &c.

COROLLAIRE.

1083. Il ſuit de-là, que pour avoir la ſolidité de chacun des cinq corps réguliers, il faut multiplier leur ſuperficie par le tiers de la perpendiculaire tirée du centre du corps ſur une de ſes faces.

On donnera à la fin de ce Livre dans le ſupplément dont on a déja parlé, la maniere de déterminer cette perpendiculaire.

Obſervation ſur tout ce qui a été établi touchant la meſure & l'égalité des ſolides.

1084. On a pû remarquer dans toutes les propoſitions précedentes que de la même maniere que le calcul du rectangle ſert de baſe à celui de toutes les autres ſuperficies, celui du parallelipipede

droit peut en ſervir également à celui des autres ſolides.

Car les priſmes, les cylindres, les pyramides, les cones, & la ſphere même ſe rapportent tous à ce ſolide.

1085. En effet, il eſt évident que les priſmes & les cylindres ſont égaux à des parallelipipedes qui ont pour baſes des baſes égales à celles de ces ſolides, & qui ont la même hauteur.

Tous les polygones & les cercles peuvent être changés en rectangles * : Or, faiſant des ſolides qui ayent pour baſes ces rectangles, & la même hauteur que les priſmes & les cylindres, &c. ils ſeront égaux à ces ſolides ; ce qui n'a pas beſoin d'une plus grande explication.

* N°. 812.

1086. Les pyramides & les cones ſont égaux à des priſmes & à des cylindres de même baſe, mais qui n'ont que le tiers de leur hauteur * : Or, ces priſmes & ces cylindres ſont égaux à des parallelipipedes droits de même baſe & même hauteur * : Donc les cones & les pyramides ſont auſſi égaux à des parallelipipedes dont la baſe ſeroit égale en ſuperficie à celle de ces ſolides, & dont la hauteur ſeroit le tiers de la leur.

* N. 1069 & 10-0.

* N°. 1039.

1087. La ſphere ſe rapporte auſſi au parallelipipede ; car elle eſt égale à une pyramide ou à un cone qui auroit pour baſe ſa ſuperficie, & pour hauteur ſon rayon * ; mais ce cone ou cette pyramide eſt égal à un parallelipipede qui auroit la même baſe & le tiers de ſa hauteur : Donc la ſphere eſt auſſi égale à un parallelipipede qui auroit pour baſe ſa ſuperficie, & pour hauteur le rayon de la ſphere.

* N°. 1074.

1088. 1°. Il ſuit donc de cette obſervation, que tout ſolide peut ſe réduire ou changer en parallelipipede droit, de la même maniere que toute ſuper-

ficie plane peut ſe changer ou réduire en rectangle.

1089. Et 2°. Que le calcul particulier du parallelipipede peut s'appliquer généralement à celui de tous les autres ſolides qui lui ſont égaux ; qu'ainſi ayant donné N. 1055. la maniere de toiſer ce ſolide, on a donné par ce même problême la maniere de toiſer les priſmes, les cylindres, les pyramides, &c. c'eſt-à-dire, de trouver le produit des trois dimenſions de ces ſolides.

II.

Du Rapport des Solides ſemblables.

DEFINITION.

1090. ON a déja appellé *produiſans des ſolides* les lignes qu'il faut multiplier enſemble pour en avoir la ſolidité.

Ainſi les ſolides auront trois produiſans, ſçavoir, 1°. Les deux lignes qu'il faut multiplier pour avoir la ſurface des baſes. Et 2°. celle qui exprime la hauteur des ſolides, & par laquelle on multiplie les ſurfaces des baſes.

1091. On appellera *produiſans homologues*, dans les ſolides ſemblables, les lignes qui exprimeront les mêmes dimenſions de ces ſolides. Par exemple, ſi l'on a deux ſolides ſemblables, comme deux priſmes qui ayent chacun un éxagone régulier pour baſe, les circonferences de ces éxagones ſeront des produiſans homologues des deux priſmes, de même que les rayons droits des deux polygones, & les hauteurs des priſmes.

THEOREME I.

1092. *Les ſolides ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs trois produiſans.*

Cette propoſition eſt évidente à l'égard des ſolides qui ont des baſes égales & paralleles, comme les parallelipipedes, les priſmes & les cylindres, qui ſont égaux au produit de leur baſe par leur hauteur.

Car ſi l'on prend les trois produiſans d'un ſolide de cette eſpece pour les antécedens de trois rapports quelconques, dont les trois dimenſions d'un autre ſolide ſoient les conſequens, la multiplication des trois produiſans du premier ſolide donnera l'antécedent d'une raiſon compoſée, dont le produit des trois produiſans de l'autre ſera le conſequent * : Or le premier ſolide eſt égal au produit de ſes trois produiſans, de même que le ſecond * ; Mais ces produits ſont en raiſon compoſée des produiſans * : Donc les ſolides qui ſont égaux au produit des produiſans, ſont auſſi en raiſon compoſée des mêmes produiſans.

* N°. 629 & 631.

* N°. 1042.

* N°. 629 & 631.

1093. A l'égard des ſolides qui ne ſont pas égaux au produit de leur baſe par leur hauteur, comme les pyramides, les cones, &c. ils ſont également en raiſon compoſée de leurs produiſans, prenant leur hauteur pour un produiſant.

Car le produit de leur baſe par leur hauteur eſt compoſée de leurs trois produiſans : Or, ce produit eſt trois fois plus grand que la ſolidité de ces ſolides, puiſque leurs baſes ne doivent être multipliées que par le tiers de leur hauteur * ; d'où il ſuit que les pyramides & les cones ne ſont que le tiers du produit de leurs trois produiſans ; mais les tiers ſont en même raiſon que les Touts * : Donc les pyramides

* N°. 1071.

* N. 623.

& les cones qui ſont égaux au produit de leurs baſes par le tiers de leur hauteur, ſont en même raiſons que les produits des mêmes baſes par leur hauteur, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont en raiſon compoſée de leurs trois produiſans. C. q. f. d.

THEOREME II.

1094. *Dans les ſolides ſemblables, les produiſans homologues ſont proportionnels entr'eux & aux côtés homologues des ſolides.*

Les ſolides ſemblables peuvent ſe diviſer en parallelipipedes, priſmes, pyramides, cones, cylindres & ſpheres; c'eſt pourquoi ſi on démontre que dans chaque eſpece de ces ſolides, les ſemblables ont leurs produiſans proportionnels entr'eux & aux côtés homologues des ſolides, on aura démontré cette propoſition géneralement pour tous les ſolides ſemblables.

DEMONSTRATION pour les parallelipipedes droits & obliqaes.

1095. La propoſition eſt évidente à l'égard des parallelipipedes droits; car leurs trois produiſans ne ſont autre choſe que les trois côtés des trois rectangles differens, par leſquels ils ſont terminés: Mais ces rectangles ſont ſemblables par la définition des ſolides ſemblables *: Donc leurs côtés homologues ſont proportionnels: Or, les lignes qu'il faut multiplier enſemble pour avoir la ſolidité de ces ſolides ſont les côtés homologues de ces rectangles: Donc ces lignes ſont proportionnelles: Donc, &c. *N°. 988.

Démonſtration pour les parallelipipedes obliques.

1096. Soient les parallelipipedes obliques ſem-

Pl.16.Fig.15. blables X & Y. On a déja vû que les produiſans des baſes, leſquelles ſont des figures ſemblables, ſont proportionnels entr'eux & aux côtés homologues de
* N°. 852. ces figures *; c'eſt pourquoi il s'agit de démontrer ſeulement ici que les hauteurs de ces ſolides ſont proportionnelles aux mêmes côtés.

Soit pour cela abbaiſſé des points D & *d* des baſes ſupérieures des ſolides X & Y, les perpendiculaires D E, *d e* ſur le prolongement des baſes inférieures F A, *f a*; il faut démontrer qu'elles ſont proportionnelles aux côtés homologues de X & de Y.

Ces ſolides étant ſemblables, les parallelogrammes A D & *a d* ſont également inclinés ſur leurs baſes : Ainſi l'angle D B E eſt égal à *d b e* : Mais à cauſe des perpendiculaires D E, *d e*, les angles D E B, *d e b* ſont droits : Donc les deux triangles B D E, *b d e*
* N°. 774. ſont ſemblables * : Donc D E. *d e* :: D B. *d b* : Donc les deux perpendiculaires D E & *d e* ſont proportionnelles aux deux côtés homologues D B & *d b* des ſolides ſemblables X & Y : Mais tous les autres côtés homologues de ces ſolides ont le même rapport que D B & *d b*, de même que les deux produiſans des baſes : Donc les trois produiſans de ces ſolides ſont proportionnels entr'eux & à leurs côtés homologues. C. q. f. d.

1097. Cette même démonſtration peut également s'appliquer aux priſmes droits ou obliques ſemblables.

En effet les baſes de ces ſolides étant des figures ſemblables, elles auront leurs produiſans proportion-
* N°. 852. nels entr'eux & à leurs côtés homologues *. Si les priſmes ſont droits, leur hauteur ſera la même que celle des rectangles élevés ſur chacun des côtés des baſes : Ces rectangles étant ſemblables, par la définition des priſmes ſemblables, ont leurs côtés ho-

mologues proportionnels : Or, les hauteurs des prismes sont des côtés homologues de ces rectangles : Donc, &c.

Si les prismes sont inclinés, on démontrera comme dans les parallelipipedes inclinés, que leur hauteur sera de même proportionnelle aux côtés homologues des parallelogrammes qui les terminent : D'où il s'ensuivra que les trois produisans de ces solides seront aussi proportionnels entr'eux & aux côtés homologues des prismes.

Démonstration pour les pyramides semblables.

1098. Les pyramides semblables, soit qu'elles soient droites ou obliques, ont aussi leurs trois produisans proportionnels.

Par la définition de ces pyramides elles ont pour bases des polygones semblables ; c'est pourquoi les deux produisans de ces bases sont proportionnels entr'eux & aux côtés homologues des bases * : Ainsi il reste seulement à démontrer que les hauteurs de ces pyramides sont proportionnelles aux mêmes côtés homologues. * N°. 85

Soit pour cela les pyramides droites X & Y, on abbaissera du sommet O & *o* de chacune d'elles, les perpendiculaires O C, *o c* sur leurs bases A D & *a d*, & les perpendiculaires O E, *o e* sur les côtés homologues B D & *b d* des bases. On tirera les lignes C E, *c e*, & l'on aura les triangles O C E, *o c e* qui seront semblables, parce qu'à cause des perpendiculaires O C, *o c*, les angles O C E, *o c e* sont droits, & que les angles O E C, *o e c* qui sont égaux chacun à l'inclinaison des triangles B O D, *b o d*, sur les bases des pyramides, sont égaux, ces inclinaisons étant égales dans les pyramides semblables : Donc O E. *o e* :: O C. *o c* : Mais O E, & *o e* sont des lignes sembla- Pl. 16. Fig. 6.

blement tirées dans les triangles ſemblables B O D, *b o d* : Donc elles ſont proportionnelles aux côtés
* N°. 839. homologues de ces triangles * : Donc O C & *o c* le ſont auſſi : Donc, &c.

Pl. 16. Fig. 7. Si les pyramides ſemblables ſont obliques, comme T & V, pour démontrer que les hauteurs ſont auſſi proportionnelles aux côtés homologues des baſes, on abbaiſſera des ſommets O & *o* de ces pyramides, les perpendiculaires O C, *o c* ſur le plan des baſes A D & *a d* prolongées autant qu'il en eſt beſoin, & les perpendiculaires O E, *o e* ſur les côtés homologues B D, *b d* de ces baſes. Alors on aura, comme dans les pyramides droites, deux triangles O E C, *o e c* qui ſeront ſemblables ; car les angles E C O, *e c o* ſont droits à cauſe des perpendiculaires O C, *o c* ; les angles O E C, *o e c*, qui ſont les ſupplémens des angles d'inclinaiſon des triangles B D O, *b d o* ſur les baſes des pyramides, ſont égaux, puiſque ces inclinaiſons ſont égales par la définition des pyramides ſemblables : Donc O E . *o e* : : O C . *o c* ; Mais O E & *o e* ſont des lignes ſemblablement tirées dans les triangles ſemblables B O D, *b o d* : Donc elles ſont proportionnelles aux côtés homologues de ces triangles *, & par conſéquent les lignes
* N°. 839. O C & *o c* le ſont auſſi : Donc dans toutes les pyramides ſemblables les hauteurs ſont proportionnelles aux côtés homologues des triangles qui les entourent : Mais les produiſans des baſes ſont auſſi pro-
* N°. 852. portionnels aux mêmes côtés * : Donc les trois produiſans des pyramides ſemblables ſont proportionnels entr'eux & aux côtés homologues de ces ſolides. C. q. f. d.

1099. Pour les cones & les cylindres ſemblables, il eſt évident, par la définition de ces ſolides, que leurs trois produiſans ſont proportionnels ; car ces

produiſans ſont les circonferences, les diametres des baſes, & les hauteurs des cylindres qui ſont tous proportionnels * : Donc, &c. * N°. 847 & 990.

1100. Les trois produiſans des ſpheres ſont auſſi proportionnels ; car ils ſont 1°. pour la ſuperficie, la circonference du grand cercle & le diametre *, * N°. 1015. Et 2°. pour la ſolidité la ſuperficie par le tiers du rayon * : Or, les circonferences des cercles ſont en même raiſon que leurs diametres, que leurs rayons, & le tiers des rayons * : Donc, &c. * N°. 1071. * N°. 847.

DEFINITION.

1101. On appelle *lignes ſemblablement tirées* dans les ſolides ſemblables, comme dans les polygones ſemblables, celles qui ſont tirées dans ces ſolides avec les mêmes circonſtances.

THEOREME III.

1102. *Les lignes ſemblablement tirées dans les ſolides ſemblables ſont proportionnelles entr'elles, aux produiſans, & aux côtés homologues des ſolides.*

Cette propoſition ſe démontrera de la même maniere que la précedente.

THEOREME IV.

1103. *Les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs produiſans homologues, ou comme les cubes de leurs côtés auſſi homologues.*

Soient deux ſolides ſemblables quelconques X & Y, par exemple, deux parallelipipedes droits ; il faut démontrer que X eſt à Y, comme le cube d'un produiſant AB du premier, eſt au cube du produiſant homologue *ab* du ſecond, ou que X. Y :: $\overline{AB}^3$. $\overline{ab}^3$ :: $\overline{AC}^3$. $\overline{ac}^3$ :: $\overline{DC}^3$. $\overline{dc}^3$. Pl. 16. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les ſolides X & Y étant ſemblables, par la ſuppoſition, leurs trois produiſans
* N°. 1094. ſont proportionnels *, & qu'ainſi on a AB. *ab* :: AC. *ac* :: CD. *cd* : Or, ſi l'on multiplie enſemble les trois antécedens de ces rapports égaux, c'eſt-à-dire, les trois produiſans de X, & qu'on multiplie de même les trois conſequens de ces raiſons qui ſont les trois produiſans de Y, on aura les deux produits AB×AC×CD, & *ab*×*ac*×*cd* qui ſeront compoſés de trois raiſons égales : Donc ils ſeront entr'eux en raiſon triplée des raiſons compoſantes,
* N°. 642. ou comme les cubes des termes de ces raiſons * : Or les termes de ces raiſons compoſantes ſont les produiſans homologues des ſolides, & les termes de la raiſon triplée en ſont les ſolidités : Donc ces ſolidités ſont entr'elles comme les cubes des produiſans homologues.

Elles ſont auſſi entr'elles comme les cubes des côtés homologues des ſolides, parce que les produi-
* N°. 1094. ſans étant proportionnels aux côtés homologues *, les cubes des produiſans le ſeront auſſi à ceux de ces
* N°. 689. côtés * : Donc les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs produiſans ou de leurs côtés homologues. C. q. f. d.

REMARQUES.

I.

1104. Il eſt évident que cette même démonſtration convient généralement à tous les ſolides ſemblables, parce qu'ils ſont toujours entr'eux, en raiſon compoſée de trois raiſons égales, & par con-
* N°. 642. ſequent comme les cubes des termes de ces raiſons *, leſquels

leſquels termes ſont les produiſans homologues des ſolides.

II.

1105. Comme les lignes ſemblablement tirées dans les ſolides ſemblables, ſont proportionnelles aux produiſans & aux côtés homologues des ſolides *, leurs cubes ſont auſſi proportionnels à ceux des produiſans & des côtés homologues *; c'eſt pourquoi les ſolides ſemblables ſont encore entr'eux comme les cubes de leurs lignes ſemblablement tirées.

* N°. 1102.
* N. 1103.

COROLLAIRES.

I.

1106. Il ſuit de la précedente propoſition, *que les parallelipipedes ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leur hauteur, ou des côtés homologues de leurs baſes.*

Ainſi, ſi l'on a deux parallelipipedes ſemblables, dont la hauteur du premier ſoit 1, & celle du ſecond 2, le premier ſera au ſecond comme le cube de 1, qui eſt 1, eſt au cube de 2 qui eſt 8, c'eſt-à-dire, que le premier ne ſera que la huitiéme partie du ſecond.

II.

1107. *Que ſi l'on a deux cubes, dont le côté du premier ſoit la moitié de celui du ſecond, le premier ſera auſſi au ſecond, comme 1 eſt à 8; & que ſi le côté d'un de ces cubes étoit 2, & celui de l'autre 3, ils ſeroient entr'eux comme le cube de 2 qui eſt 8, eſt au cube de 3 qui eſt 27.*

III.

1108. *Que les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Car elles ſont entr'elles comme les cubes de leurs produiſans homologues * : Or, les diametres ſont des produiſans homologues : Donc, &c.

* N°. 1103.

Elles ſont auſſi entr'elles comme les cubes de leurs rayons, parce que les rayons étant proportionnels aux diametres, leurs cubes le ſeront encore à ceux des diametres * : Donc, &c.

* N°. 689.

Ainſi, ſi l'on a une ſphere dont le diametre ſoit double de celui d'une autre ſphere, elle en ſera octuple ; car elles ſeront entr'elles comme 1 eſt à 8.

C'eſt pourquoi ſi l'on compare un boulet d'un pouce de diametre, avec un autre boulet de deux pouces, & que celui d'un pouce peſe, par exemple, une livre, celui de deux pouces qui contiendra huit fois plus de matiere peſera huit fois davantage, c'eſt-à-dire, huit livres.

1109. Il ſuit auſſi de la même propoſition, que ſi l'on connoît le diametre & le poids d'un boulet, on pourra venir aiſément à la connoiſſance du poids d'un autre boulet dont le diametre ſera donné, ou à trouver le diametre d'un autre boulet dont le poids ſera également donné.

Car ſi, par exemple, on ſuppoſe qu'un boulet de 3 pouces de diametre peſe 4 livres, & qu'on veuille trouver celui d'un boulet de 24 livres, on dira comme 4 livres eſt à 24 livres ; ainſi le cube de 3 qui eſt 27, eſt au cube du boulet de 24. Faiſant cette Regle, on trouvera 162 pouces pour le cube du diametre du boulet de 24 ; ainſi la racine cube de ce

4. 24. 27.
24
108
54.
648 } 162
4
24
4
08
4
0

nombre donnera le diametre du boulet de 24, &c.

1110. Suppoſans auſſi que le diametre de la terre ſoit connu, & que le diametre du ſoleil ſoit cent fois plus grand que celui de la terre, on trouvera le globe du ſoleil par cette même Regle, *comme le cube du diametre de la terre qui eſt 1, eſt au cube de celui du ſoleil qui eſt le cube de 100; ainſi la ſolidité de la terre eſt à celle du ſoleil;* ou, comme le cube de 1 qui eſt 1, eſt au cube de 100 qui eſt 1000000; ainſi le globe de la terre eſt à celui du ſoleil : ce qui fait voir que le globe du ſoleil eſt un million de fois plus grand que celui de la terre.

PROBLEMES.

PREMIER PROBLEME.

1111. *Trouver la ſolidité d'un cone droit tronqué, dont la hauteur eſt connue, de même que le diametre de chacune de ſes baſes.*

Soit le cone droit tronqué A B D E, dont les diametres des baſes A B, E D ſont connus de même que la hauteur C G. Pl. 6. Fig. 9.

Si l'on connoiſſoit la hauteur de la partie E D F qui eſt tronquée, on auroit le cone entier A F B, dont on trouveroit la ſolidité en multipliant la ſurface de ſa baſe A B par le tiers de ſa hauteur ou de ſon axe C F *. On trouveroit de même celle du petit cone retranché E F D, le diametre E D de ſa baſe & ſa hauteur G F étant connus : Ainſi toute la difficulté de cette opération ne conſiſte donc qu'à déterminer la hauteur C F que le cone auroit ſi les côtés A E & B D étoient prolongés juſqu'à leur rencontre au ſommet F. * Nº. 1071.

Pour trouver cette hauteur C F, il faut de l'ex-

trémité E du diametre de la baſe ſupérieure ED; imaginer la perpendiculaire EH qui ſera patallele à CG ou CF : ce qui donnera les deux triangles AHE, ACF qui ſeront ſemblables; car l'angle A eſt commun à l'un & à l'autre, & les angles en H & en C ſont droits. On aura donc AH. HE : : AC. CF : Or AH eſt connue, parce qu'elle eſt la difference des deux rayons AC & EG qui ſont donnés; HE qui eſt égale à CG eſt donnée de même que le rayon AC de la baſe : Donc CF étant le quatriéme terme d'une proportion dont les trois premiers ſont connus, ſera connue *, & le problême pourra enſuite s'achever ſans aucune difficulté.

* N. 665 & 806.

1112. Comme le toiſé du cone tronqué eſt fort important dans l'Artillerie pour meſurer l'*Excavation* (*a*) ou l'*Entonnoir* des mines, nous en donnerons ici le calcul tout entier :

Soit ſuppoſé AB de 42 pieds,
ED de 14 pieds,
Et CG ou EH de 56.

L'on aura le rayon AC de 21 pieds, & EG de 7; par conſequent AH qui eſt égale à AC moins EG, c'eſt-à-dire à 21, moins 7, ſera de 14 pieds.

L'on aura donc, en ſubſtituant dans la proportion AH. HE : : AC. CF, à la place des trois premiers termes leurs valeurs connues, 14. 56 : : 21. CF; ce qui donnera $CF = \frac{56 \times 21}{14} = 84$ pieds : Ainſi la hauteur entiere du cone propoſé eſt de 84 pieds.

(*a*) L'Excavation ou l'Entonnoir d'une mine eſt l'eſpece de trou ou d'enfoncement qu'elle fait en ſautant. On a trouvé que cet enfoncement a ſenſiblement la figure d'un cone tronqué droit. Voyez le premier vol. *des Elémens de la Guerre* des ſieges, page 127 & ſuivantes.

Retranchant de cette hauteur celle du cone tronqué qui eſt de 56 pieds, il reſtera 28 pieds pour la valeur de G F, ou pour la hauteur de la partie tronquée vers le ſommet.

Préſentement, on trouvera la ſolidité du cone entier en multipliant la ſurface de ſa baſe par le tiers de C F.

Pour avoir cette ſurface on cherchera ſa circonference à l'ordinaire, par cette Regle de Trois, 7 eſt à 22, comme 42 eſt à la circonference de A B *, qu'on trouvera de 132 pieds : On multipliera cette circonference par la moitié de A C *, ou pour éviter les fractions, par A C tout entier, qui eſt 21, & l'on prendra la moitié du produit 2772, qui eſt 1386 pieds quarrés. On multipliera cette ſuperficie par le tiers de C F, c'eſt-à-dire, par le tiers de 84, qui eſt 28, & le produit 38808 pieds cubes ſera la ſolidité du cone entier.

* N°. 443.

* N°. 440.

```
      1 3 2
        2 1
  ---------
      1 3 2
    2 6 4 .
  ---------
    2 7 7 2
  ---------
    1 3 8 6   Superficie de la baſe du cone.
        2 8
  ---------
  1 1 0 8 8
  2 7 7 2 .
  ---------
  3 8 8 0 8 pieds cubes. Solidité du cone entier.
  ---------
```

On trouvera de même la ſolidité du petit cone.

Pour cet effet, on cherchera d'abord la circonférence du cercle de ſa baſe, en diſant 7. 22 :: 14. $x. = \frac{14 \times 22}{7} = 44$. On multipliera cette circonférence par la moitié du rayon E G, ou pour éviter les fractions, par ce rayon entier qui vaut 7 pieds, & l'on prendra la moitié du produit 308, qui donnera 154 pieds quarrés pour la ſurface de la baſe du petit cone.

44
7
308
154 *Superficie de la baſe du petit cone.*
28
1232
308.
4312
1437 $\frac{1}{3}$. *Solidité du petit cone.*

Cone total - - 38808 pieds cubes.
Petit cone - - - 1437 $\frac{1}{3}$
Difference - - 37370 $\frac{2}{3}$. *Solidité du cone tronqué.*

On multipliera cette baſe par le tiers de G F ou par G F entier, & l'on prendra le tiers du produit 4312 qui eſt 1437 pieds cubes & un tiers de pieds, ou 4 pouces cubes courant ſur pieds, pour la ſolidité du petit cone.

On retranchera de la ſolidité du cone total, celle

du petit, & il reſtera pour le cone tronqué, 37370 pieds cubes $\frac{2}{3}$ ou 8 pouces, pour la ſolidité du cone tronqué propoſé ABDE.

Si l'on veut connoître en toiſes la ſolidité de ce cone tronqué, on diviſera les pieds cubes qu'il contient par 216, nombre des pieds cubes que contient la toiſe cube *, & le quotient donnera les toiſes cubes de la ſolidité du même cone. * N. 1042.

SECOND PROBLEME.

1113. *Trouver la ſolidité d'un cone tronqué oblique ABCD dont on connoît la hauteur DG, le côté AD, & le diametre des baſes AB & DC.* Pl. 7. Fig. 1.

RESOLUTION.

Il ne s'agit, comme dans le problême précedent, que de trouver la hauteur du cone entier.

Pour cela, il faut imaginer ſes côtés prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au ſommet E, & conſiderer alors qu'on a deux triangles ſemblables AEB, DEC, qui donnent AB. DC:: AE. DE; & en diviſant * AB—DC. DC:: AE—DE. DE: Or AB & DC étant connues, leur difference ou AB —DC le ſera auſſi. Conſiderez de même que AE —DE = AD qui eſt ſuppoſé connue, & qu'ainſi les trois premiers termes de cette proportion étant connus, DE qui en eſt le quatriéme le ſera également; d'où il ſuit, qu'ajoutant DE à AD, AE ſera connue. * N°. 624.

On imaginera enſuite du point E la perpendiculaire EH qui donne la hauteur du cone entier, & l'on prolongera DC juſqu'en F. Alors on aura les deux côtés EA, EH du triangle AEH qui ſeront coupés par DF, qui eſt parallele à la baſe AH; ce qui donnera AD. DE:: HF. FE *. * N°. 701.

Les trois premiers termes de cette proportion ſont

connus; car A D l'eſt, par la ſuppoſition; la proportion précedente a fait connoître D E, & le troiſiéme terme F H eſt égal à D G, qui eſt la hauteur du cone tronqué: Donc F E ſera auſſi connue.

La hauteur du cone total & celle du petit cone retranché étant ainſi connus, on achevera le problême comme le précedent.

TROISIE'ME PROBLEME.

1114. *Trouver la ſolidité d'une pyramide tronquée quelconque, dont les baſes ſont connues de même que les côtés des trapezes dont elle eſt entourée, & la perpendiculaire tirée entre ſes deux baſes.*

Pl. 17 Fig. 2. Soit la pyramide tronquée A B C D G, dont les baſes A C & G D ſont connues, de même que les côtés E B, D C, &c. & la perpendiculaire H I tirée entre ſes deux baſes: Il faut trouver la ſolidité de cette pyramide.

RESOLUTION.

On imaginera que tous les côtés de la pyramide tronquée ſont prolongés juſqu'à leur point de rencontre L, qui ſera le ſommet de la pyramide entiere. De ce ſommet on imaginera la perpendiculaire L I tirée ſur la baſe A C, qui coupera G D en H. Cette perpendiculaire ſera la hauteur de la pyramide entiere. On cherchera ſa valeur comme dans le problême précedent.

Pour cela, on verra que les deux triangles ſemblables B L C, E L D donnent B C. E D :: C L. D L: D'où l'on tire en diviſant B C — E D. E D :: C L — D L. D L; ce qui donnera la valeur de D L; car B C & E D étant connus, leur difference B C — E D le ſera auſſi. C L — D L = D C qui eſt

connu : Donc les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le quatriéme D L le ſera auſſi *.

* N°. 669 & 806.

Préſentement tirant H D & I C qui ſeront paralleles, étant les communes ſections des plans paralleles G D & A C, & du plan coupant I L C *; c'eſt pourquoi on aura le triangle C L I dont les deux côtés L C & L I ſeront coupés proportionnellement par H D parallele à I C *; ce qui donnera C D. D L :: I H. H L. Les trois premiers termes de cette derniere proportion ſont connus; car C D eſt connue par la ſuppoſition, & D L l'eſt par la précedente proportion : A l'égard de I H elle eſt connue, puiſqu'elle eſt la perpendiculaire entre les deux baſes de la pyramide tronquée : Donc H L, qui eſt égale à $\frac{DL \times IH}{CD}$ *, ſera connue, & par conſéquent la hauteur L I de la pyramide entiere le ſera également.

* N°. 911.

* N°. 781.

* N°. 669.

Cette préparation étant faite, il ne s'agit plus que de trouver la ſolidité de la pyramide entiere A B C K L, en multipliant ſa baſe A C par le tiers de L I *, & d'en retrancher la ſolidité de la petite pyramide G E D F L qui eſt auſſi égale au produit de ſa baſe G D par le tiers de H L, le reſte ſera la ſolidité de la pyramide tronquée propoſée. Ce qui eſt évident.

* N°. 171.

REMARQUE.

1115. Il eſt évident que cette réſolution convient également aux pyramides tronquées droites, comme aux obliques.

QUATRIE'ME PROBLEME.

1116. *Trouver la ſolidité d'un ſecteur ſpherique A C B E, dont le côté C A ou le rayon de la ſphere eſt con-*

Pl. 17. Fig. 3.

nu, de même que le diametre A B de la calote ſpherique qui ſert de baſe au ſegment A E B.

RESOLUTION.

Il faut trouver d'abord la ſurface de la calote ou du ſegment A E B en multipliant la circonference du grand cercle de la ſphere ou de celui qui a C A pour rayon, par la hauteur D E de cette calote *. Cette hauteur n'eſt pas ſuppoſée connue dans ce problême; Mais on peut la trouver aiſément en conſidérant que ſi du centre C de la ſphere on tire C E perpendiculaire ſur A B, il la coupera en deux également en D *, & qu'alors à cauſe du triangle rectangle C A D, dont l'hypoténuſe C A & un côté A D ſont connus, on trouvera, ôtant du quarré de C A celui de A D, le quarré de C D *, dont la racine donnera la valeur de C D. Otant enſuite C D de C E ou C A, il reſtera la valeur de D E.

* N°. 1019.

* N°. 189.

* N°. 794.

Cette ligne étant ainſi trouvée, & la ſurface de la calote connue, il faut conſiderer que le ſegment A C B E peut être regardé comme compoſé d'une infinité de petites pyramides de même hauteur, dont le ſommet eſt au centre C, & dont les baſes forment la ſurface de la calote: Or, ces petites pyramides de même hauteur C A ſont égales à une ſeule qui auroit pour baſe la ſomme de toutes les baſes de ces pyramides, & la même hauteur C A.

D'où il ſuit, que le ſecteur de ſphere A C B E eſt égal à une pyramide qui auroit pour baſe la ſurface de la calote qui le termine ſur la ſphere, & pour hauteur le rayon C A de la ſphere, & qu'ainſi pour avoir la ſolidité du ſecteur propoſé, il faut multiplier la ſurface de la calote A E B A, par le tiers du rayon de la ſphere.

REMARQUE.

1117. Si le diametre A B de la calote & ſa hauteur D E avoient ſeulement été donnés, on ſeroit venu à la connoiſſance du rayon C A par la propriété du cercle, c'eſt-à-dire, en conſidérant que A D eſt moyenne proportionnelle entre la hauteur D E de la calote, & le reſte du diametre *; ce qui donne D E. A D :: A D. D F : c'eſt pourquoi cherchant une troiſiéme proportionnelle à D E & A D *, on aura la valeur de D F, à laquelle ajoutant D E, on aura le diametre de la ſphere, dont la moitié ſera le rayon C E ou C A.

* N°. 798.

* N°. 673 & 807.

CINQUIE'ME PROBLEME.

1118. *Trouver la ſolidité d'une calote ſpherique A D B, dont le diametre A B de la baſe eſt connu, & la hauteur D E de la calote.*

RESOLUTION.

Fl. 17. Fig. 4.

On trouvera d'abord la valeur du rayon A C de la ſphere, comme on l'a enſeigné dans la remarque précedente; enſuite la ſolidité de tout le ſecteur C A D B par le précedent problême. On ôtera de cette ſolidité celle du cone A C B, dont on connoît le diametre A B de la baſe & la hauteur C E, qui eſt la difference du rayon C A, & de la hauteur D E de la calote; le reſte ſera la ſolidité de la calote. Ce qui eſt évident.

SIXIE'ME PROBLEME.

1119. *Trouver la ſolidité d'une zone A B C D, dont la hauteur H L eſt connue de même que le rayon A H de la ſphere.*

RESOLUTION.

Pl. 17. Fig. 5. Si le cercle A B de la baſe de la zone paſſe par le centre H de la ſphere, il faudra trouver d'abord la ſolidité de la demi-ſphere, & enſuite ôter de cette ſolidité, celle de la calote ſpherique D C G, qui jointe à la zone, acheve la demi-ſphere, le reſte ſera évidemment la ſolidité de la zone.

Fig. 6. Si la grande baſe de la zone ne paſſe pas par le centre, on tirera les rayons A H & H B, & l'on trouvera la ſolidité de la calote A D G C B qui renferme la zone A B C D & la calote D G C. On trouvera après cela la ſolidité de cette calote ſupérieure; on l'ôtera de la ſolidité de la premiere; le reſte ſera la ſolidité de la zone A B C D.

REMARQUE.

1120. Pour le ſecond cas de ce dernier problême, il faut connoître les deux diametres des baſes A B & D C de la zone; car alors il ſera aiſé par le moyen des triangles rectangles A K H, D L H, dont les hypoténuſes A H & D H ſont données, & un côté A K & D L, de déterminer la valeur des lignes H K & H L, dont on a beſoin dans le calcul dont il s'agit.

SEPTIE'ME PROBLE'ME.

1121. *Trouver la ſolidité d'un corps irrégulier.*

Il faut le partager en parallelipipedes, priſmes, pyramides, &c. & meſurer chacun de ces ſolides en particulier; leur ſomme donnera la ſolidité du corps irrégulier propoſé.

1122. Si le corps eſt très-irrégulier, enſorte qu'il ne puiſſe pas ſe partager aiſément en corps géometriques ou meſurables, on pourra, ſi le volume n'en

eſt pas trop conſidérable, le plonger dans un vaiſſeau parallelipipede, qu'on remplira enſuite d'eau ou de ſable, & retirant enſuite le corps, le vuide du parallelipipede, qui ſera auſſi un ſolide de même eſpece, donnera l'eſpace qu'occupoit le corps qui y étoit plongé; enſorte qu'en toiſant ou meſurant ce vuide, on aura la ſolidité du corps irrégulier propoſé. C'eſt ainſi qu'on pourroit avoir la ſolidité d'une ſtatue & de tout autre corps irrégulier de même eſpece.

HUITIE'ME PROBLEME.

1123. *Trouver la ſolidité d'un corps creux.*

RESOLUTION.

Il faut d'abord le meſurer comme plein, & enſuite meſurer le vuide qu'il renferme; ôtant enſuite ce vuide de la ſolidité du corps conſideré plein, le reſte ſera celle du corps creux. Pl. 17. Fig. 7.

Par exemple, ſoit propoſé de meſurer la maçonnerie d'un puits A B C D, ou ce qui eſt la même choſe, d'un cylindre creux dont le diametre A B de la baſe eſt de ſix pieds, & celui E F du vuide de quatre pieds. Suppoſons auſſi que la hauteur du cylindre ou la profondeur A C du puits ſoit de trente pieds.

On trouvera d'abord la ſolidité du cylindre total C B en multipliant la ſurface du cercle dont A B eſt diametre, par la hauteur C A *, & l'on trouvera 848 pieds cubes & $\frac{4}{7}$ pour la ſolidité de ce cylindre. * N°. 1041.

On meſurera après cela la ſolidité du cylindre vuide G F, qu'on trouvera de 368 pieds cubes $\frac{4}{7}$. On ôtera cette ſolidité de la premiere, le reſte 480 pieds cubes ſera la ſolidité de la maçonnerie du puits A C D B.

$$7 . 22 :: 6 . \quad x = \frac{22 \times 6}{7} = 18\ \frac{6}{7}.$$

18 $\frac{6}{7}$ *Circonference du cylindre plein.*
3 *Rayon de ſa baſe.*

56 $\frac{4}{7}$

28 $\frac{2}{7}$ *Superficie de la baſe AB.*
30 *Hauteur du cylindre.*

840
Pour $\frac{1}{7}$ - 4 $\frac{2}{7}$
Pour $\frac{1}{7}$ - 4 $\frac{2}{7}$

848 $\frac{4}{7}$ *Solidité du cylindre plein.*

$$7 . 22 :: 4 . \quad x = \frac{22 \times 4}{7} = 12\ \frac{4}{7}.$$

12 $\frac{4}{7}$ *Circonference du cylindre vuide.*
1 *Moitié du rayon de la baſe du cylindre vuide.*

12 $\frac{4}{7}$ *Superficie de la baſe du même.*
30 *Hauteur du même cylindre.*

360
Pour $\frac{1}{7}$ - 4 $\frac{2}{7}$
Pour $\frac{6}{7}$ 12 $\frac{6}{7}$

377 $\frac{1}{7}$ *Solidité du cylindre vuide.*

qui de 848 $\frac{4}{7}$ *Cylindre total.*
ôte - 377 $\frac{1}{7}$ *Cylindre vuide.*

Reſte 471 $\frac{3}{7}$ pieds cubes. *Cylindre creux.*

NEUVIE'ME PROBLEME.

1124. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données A B & B D.*

RESOLUTION.

On fera un rectangle A D qui ait pour côtés differens les deux lignes A B & B D: On tirera les deux diagonales A D & B E, & on prolongera indéfiniment les deux côtés B D & B A vers H & vers I. On décrira après cela du point C, pris pour centre un arc I K H, qui coupe les deux côtés B D & B A prolongés, mais de maniere (& c'eſt à quoi on ne peut parvenir que par le tatonnement) que la ligne I H tirée des points H & I, où l'arc K coupe le prolongement des lignes B D & B A, paſſe par le point E du rectangle E D. Cette ligne étant ainſi trouvée, les lignes D H & A I ſeront les deux moyennes proportionnelles cherchées. Pl. 17. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Prolongez l'arc H K I en N, & prolongez auſſi B H & B I en M & en N: Du centre C, abbaiſſez les perpendiculaires C G & C L ſur B D & B A, leſquelles couperont les cordes M H & N I en deux également, de même que les côtés B D & B A du rectangle B E*. L'on aura ainſi D H = B M & B N = A I. Tirez auſſi M N. * Nº. 189.

Conſiderez enſuite que les triangles E D H, M B N ſont ſemblables; car ils ont chacun un angle droit E D H, M B N, & les angles E H D, M N B, égaux, l'un & l'autre ayant pour meſure la moitié de l'arc M I*: Donc D E. D H :: B M. B N, ou comme B M = D H mettant D H à la place de B M, & A I à la place de B N, on aura D E. D H :: D H. A I.

Les triangles MBN, IAE ſont auſſi ſemblables ayant les angles B & A droits, & les angles M & I qui s'appuyent ſur le même arc NH, égaux : Donc MB (ou ſon égal) DH.. AI :: BN. AE, ou en mettant AI à la place de BN qui lui eſt égal, on aura DH. AI :: AI. AE : Mais par la comparaiſon des deux premiers triangles ſemblables on a DE. DH :: DH. AI : Donc on a par ces deux proportions DE. DH :: DH. AI :: AI. AE : Donc DH & AI ſont deux moyennes proportionnelles entre ED & AE, ou leurs égales AB & BD. C. q. f. d.

DIXIE'ME PROBLEME.

1125. *Faire un cube qui ſoit à un autre cube donné, dans une raiſon quelconque, par exemple, dans celle de 2 à 3, c'eſt-à-dire, qui en ſoit les deux tiers.*

Pl. 18. Fig. 1. Soit le cube donné X, il faut en trouver un autre Y qui en ſoit les deux tiers.

RESOLUTION.

Il faut diviſer AB en trois parties égales ; prendre deux de ſes parties, & chercher deux moyennes proportionnelles entre la ligne AB & les deux tiers de AB, qu'on ſuppoſe être GH ; le cube Y qui aura pour côté la premiere de ces deux moyennes proportionnelles, ſera le côté du cube demandé.

DEMONSTRATION.

Soit EF la premiere de ces deux moyennes proportionnelles, qui eſt le côté du cube Y, on aura

par le N. 695. $\overline{AB}^3 . \overline{EF}^3 :: AB . GH$: Donc puiſque GH eſt les deux tiers de AB, le cube de EF ou $\overline{EF}^3$,

$\overline{EF}^3$, ſera de même les deux tiers du cube de AB ou de $\overline{AB}^3$; c'eſt-à-dire, que XY :: 3 . 2.

REMARQUES.

I.

1126. Si on avoit voulu que le ſecond cube fût double du premier, il auroit fallu trouver deux moyennes proportionnelles entre AB & le double de AB; le cube qui auroit eu pour côté la premiere de ces deux moyennes proportionnelles, auroit été double du propoſé X; ce qui eſt évident.

II.

1127. Ce problême donne, comme on le voit, le moyen de faire un cube double d'un autre, c'eſt ce qu'on appelle la *duplication du cube*. Il étoit fort célébre chez les Anciens, ſous le nom de problême *déliaque*, à cauſe de l'Oracle d'Apollon de Delos qui avoit demandé un Autel double d'un autre. Les Autels étoient cubiques; ainſi il falloit trouver la duplicature du cube pour ſatisfaire l'Oracle. Les plus grands Géometres y travaillerent ſans ſuccès, parce qu'ils vouloient n'employer pour ſa réſolution que la ligne droite & de la circulaire, c'eſt-à-dire, qu'ils vouloient le réſoudre par la Géometrie ordinaire, qui ne conſidere que ces deux ſortes de lignes. Ce problême eſt encore inſoluble de cette maniere parmi les Modernes, comme il l'étoit parmi les Anciens. On voit cependant qu'il ne conſiſte qu'à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. Mais il s'agit de les trouver ſans tatonnement & de la même maniere qu'on trouve une troiſiéme, une moyenne proportionnelle, &c. à deux grandeurs données.

Les Anciens ont donné differentes méthodes à ce ſujet, mais qui ſuppoſant ou du tatonnement ou des inſtrumens differens du compas ordinaire, ou enfin des lignes courbes d'une autre eſpece que la circulaire, n'étoient pas cenſés alors géometriques. Depuis le célebre *Deſcartes*, on appelle *géometrique* tout ce qui eſt précis & exact, & *méchanique* ce qui ne l'eſt pas : Enſorte que ce qui ſe fait par la Géometrie compoſée, qui a pour objet la conſidération des ſections du cone, eſt regardé comme géometrique. En ſe ſervant de cette Géometrie on trouve aiſément deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données par l'interſection de deux ſections du cone ; Mais comme ces ſections n'appartiennent pas à un Traité Elémentaire comme celui-ci, on a donné une autre méthode de réſoudre ce problême ; Mais qui ſuppoſant un peu de tatonnement ne peut être regardée comme géometrique.

1128. Il eſt aiſé d'obſerver qu'on ne peut faire, en nombres, des cubes dans tel rapport que l'on veut, qui ſoient, par exemple, les moitiés, les tiers, &c. les uns des autres ; car pour cela, il faudroit pouvoir trouver deux moyennes proportionnelles entre les nombres qui expriment les côtés de ces cubes, & leurs moitiés, leurs tiers, &c. ce qui ne ſe peut pas dans toutes ſortes de nombres.

1129. Si on pouvoit extraire exactement la racine cube de toutes ſortes de quantités ou de nombres, on n'auroit pas beſoin de moyennes proportionnelles pour faire des cubes & des ſolides ſemblables dans tel rapport que l'on voudroit ; car ſi, par exemple, il falloit faire une ſphere triple d'une autre, il n'y auroit qu'à cuber le diametre de la ſphere propoſée, multiplier enſuite ce cube par 3, & en extraire la racine cube du produit ; la ſphere qui au-

roit pour diametre une ligne égale aux unités de cette racine, feroit évidemment triple de la premiere ; car les ſpheres ſont comme les cubes de leurs diametres* : Or, le cube de la ſeconde eſt par l'opération triple de celui de la premiere : Donc, &c. Mais c'eſt ce qui ne ſe peut, comme on l'a démontré N. 769. * N°. 1168.

1130. On peut appliquer ce même raiſonnement à tous les autres ſolides ſemblables. S'il ſuffit d'avoir leurs côtés homologues par approximation, on peut diviſer celui du ſolide propoſé en un très-grand nombre de petites parties, afin que les reſtes des racines cubes deviennent d'une grandeur inſenſible. Alors ſi le ſolide demandé doit être double du propoſé, on doublera le cube de ce propoſé, & on extraira la racine cube du produit, qui ſera le côté homologue du ſolide double, &c.

ONZIE'ME PROBLEME.

1131. *Faire un cube égal à un parallelipipede.*

Soit le parallelipipede A D auquel on veut faire un cube égal.

Resolution.

Il faut d'abord changer la baſe B C du parallelipipede en quarré, & pour cela trouver une moyenne proportionnelle F G entre les deux côtés A B & A C de la baſe du parallelipipede. Pl. 18. Fig. 2.

On cherchera enſuite deux moyennes proportionnelles entre F G, & la hauteur B E du parallelipipede, la premiere de ces deux moyennes proportionnelles qu'on ſuppoſe être H L, ſera le côté du cube X, égal à A D.

DEMONSTRATION.

Puiſque FG eſt moyenne proportionnelle entre AB & AC, on a $\overline{FG}^{2} = AB \times AC$, & multipliant chacun de ces termes par la hauteur BE du parallelipipede AD, on aura $\overline{FG}^{2} \times BE = AB \times AC \times BE$, c'eſt-à-dire, que le produit du quarré de la moyenne proportionnelle FG par la hauteur BE, eſt égal au produit des trois produiſans du parallelipipede AD, & par conſéquent qu'il eſt égal à ce ſolide : Mais HL eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles entre FG & BE : Or, on a vû N. 698. que la premiere des deux moyennes proportionnelles entre deux quantités quelconques, étoit égale à la racine cube du quarré de la premiere quantité multipliée par la ſeconde : Donc la racine cube de $\overline{FG}^{2} \times BE$ ou $\sqrt[3]{\overline{FG}^{2} \times BE} = HL$: Donc puiſque cette racine eſt égale à HL, ſon cube X ſera auſſi égal à celui de HL, c'eſt-à-dire, que $\overline{FG}^{2} \times BE = \overline{HL}^{3}$: Mais le premier produit de cette expreſſion eſt égal au parallelipipede propoſé AD : Donc le cube de HL, c'eſt-à-dire X, eſt égal au même parallelipipede. C. q. f. d.

REMARQUES.

I.

1132. Il ſuit de ce problême, que de la même maniere qu'on peut rapporter toutes les figures au quarré, on peut de même réduire les ſolides au cube ; car ils peuvent tous être réduits au paralle-

lipipede * : Or, puiſque ce ſolide peut être changé en cube, tous les autres ſolides pourront donc l'être auſſi également.

* Nº. 1134, & ſuivans.

II.

1133. Si l'on a en nombres les trois produiſans du parallelipipede propoſé AD, on trouvera aiſément la valeur du côté du cube égal à ce parallelipipede, en extrayant la racine cube de leur produit. Si ce produit n'eſt pas un cube parfait, on ſe ſervira de l'approximation des racines cubes pour approcher de ſa racine, & trouver ainſi le côté cherché d'autant plus exactement qu'on voudra ajouter plus de tranches au produit des produiſans du parallelipipede, le tout ainſi qu'il eſt expliqué N. 546.

III.

Uſage du Compas de proportion pour faire des Solides ſemblables dans tel rapport que l'on veut.

1134. IL y a ſur les deux branches du compas de proportion une ligne appellée *ligne des ſolides*, ſous laquelle eſt écrit *les ſolides*. Elle ſert à faire des ſolides ſemblables dans tel rapport que l'on veut, comme celle des plans ſert à faire des plans ſemblables qui ſont entr'eux dans une raiſon donnée quelconque.

La longueur des branches du compas étant déterminée comme dans la ligne des plans, on trace les diviſions de la ligne des ſolides de la même maniere ; Mais comme les ſolides ſemblables ſont dans

la raiſon des cubes des côtés homologues, on diviſe cette ligne dans la progreſſion des racines cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. enſorte que le cube qui a pour côté la premiere diviſion, eſt la moitié de celui qui a pour côté les deux premieres, le tiers de celui qui a pour côté les trois premieres, &c. Ces diviſions ſont ordinairement au nombre de 64.

Pour trouver ces differentes diviſions, on ſuppoſe que la longueur de la ligne des ſolides ſur chaque branche, eſt diviſée en un grand nombre de parties égales, comme 1000, ou ſi l'on veut encore plus d'exactitude, en un plus grand nombre de parties. On cube 1000, qui donne 1000000000, & l'on extrait la racine cube de ſa 64e partie, laquelle donne la premiere diviſion de la ligne des ſolides, qui ſe marque du centre en allant vers l'extrémité de chacune des branches du compas. Si on cube enſuite les parties de cette premiere diviſion, & que le cube en ſoit multiplié par 2, la racine cube du produit ſera la ſeconde diviſion de la ligne des ſolides; & ſi on le triple, & qu'on en extraye enſuite la racine cube, on aura le côté du troiſiéme ſolide ou de la troiſiéme diviſion. On trouvera de la même maniere la quatriéme, la cinquiéme, &c.

La conſtruction de la ligne des ſolides étant ainſi expliquée, ſes uſages ſe concevront avec beaucoup plus de facilité.

PREMIER PROBLEME.

1135. *Faire un ſolide avec le compas de proportion, comme par exemple, une ſphere qui ſoit à une autre ſphere donnée X dans le rapport de 9 à 4.*

Pl. 18. Fig. 3. Soit A B le diametre de la ſphere X, & ſoit D C E

l'angle que font enſemble les deux lignes des ſolides ſur les branches du compas de proportion dont le centre eſt C.

On prendra le diametre AB avec le compas ordinaire, & on le portera ſur les deux mêmes diviſions de la ligne des ſolides; mais on prendra ces diviſions, dans cet exemple, de maniere qu'elles ſoient les quatre neuviémes d'autres diviſions de la ligne des ſolides. On choiſira pour cela un nombre 36 ou 54 qui peut ſe diviſer par 9. Suppoſons qu'on ait choiſi 36, ſa neuviéme partie eſt 4, ſes quatre neuviémes ſeront donc 16. On ouvrira le compas de proportion, enſorte que l'intervalle de 16 à 16 qu'on ſuppoſe FG, ſoit égal au diametre AB.

Le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, on prendra l'intervalle des diviſions 36 & 36 des deux lignes des ſolides: on ſuppoſe que cet intervalle eſt HL. Cette ligne ſera le diametre d'une ſphere Y qui ſera à X dans la raiſon de 9 à 4.

DEMONSTRATION.

Les triangles ſemblables CFG, CHL donnent CF. CH:: CG. CL. Ces quatre lignes étant proportionnelles, leurs cubes le ſont auſſi: Or le cube de CF eſt à celui de CH, comme 16 eſt à 36 ou comme 4 eſt à 9, par la conſtruction de la ligne des ſolides: Donc le cube de FG eſt à celui de HL dans la même raiſon de 4 à 9; Mais les ſpheres X & Y ſont comme les cubes de leurs diametres: Donc, &c.

Il eſt évident qu'on fera de même un cube double d'un autre cube, & en general des ſolides ſemblables qui ſoient entr'eux dans telle raiſon que l'on voudra.

Si le diametre AB eſt trop grand pour pouvoir être porté ſur les deux lignes des ſolides, on y portera ſon tiers, ſon quart, ou telle partie plus petite

qu'on voudra, & alors H L ſera la même partie du diametre de Y ; enſorte qu'en la prenant autant de fois que la partie F G eſt contenue dans A B, on aura le diametre de la ſphere Y.

SECOND PROBLEME.

1136. *Trouver avec la ligne des ſolides, le rapport de deux ſolides quelconques ſemblables, par exemple, celui de deux ſpheres S & T dont les diametres ſont A B & C D.*

RESOLUTION.

Pl. 18. Fig. 4. On ouvrira à volonté les deux branches du compas de proportion, & l'on prendra avec le compas ordinaire, le diametre A B de la ſphere S, qu'on ſuppoſe la plus petite. On le portera ſur les deux mêmes diviſions de la ligne des ſolides. Suppoſons que ces diviſions ſoient 20 & 20.

On prendra enſuite le diametre C D de la ſphere T, qu'on portera ſur les deux lignes des ſolides, de maniere que les extrémités C & D tombent ſur les deux mêmes diviſions. Suppoſons que ce ſoit ſur 50 & 50. On aura alors la ſphere S à la ſphere T, comme 20 eſt à 50, ou comme 2 eſt à 5.

Car les cubes des diametres A B & C D ſont entr'eux comme ces deux nombres ; Mais les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs diametres : Donc, &c.

On trouvera de la même maniere le rapport de deux autres ſolides ſemblables quelconques.

TROISIE'ME PROBLEME.

1137. *Le diametre d'un boulet de fer étant donné, par exemple de ſix pouces, avec ſon poids de 33 livres, trouver le diametre d'un autre boulet, par exemple de 24 livres.*

RESOLUTION.

On ouvrira le compas de proportion de maniere que l'intervalle de 33 à 33 de la ligne des ſolides ſoit égale au diametre du boulet, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit de ſix pouces. Le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, l'intervalle de 24 à 24 ſera le diametre du boulet de 24 livres. Ce qui eſt évident, puiſque les deux ſolides qui auront ces deux intervalles pour diametres, ſeront entr'eux comme 33 eſt à 24, & que ces intervalles ſont en même raiſon : Donc, &c.

QUATRIE'ME PROBLEME.

1138. *Le diametre & le poids d'un boulet de fer étant donné, par exemple, celui de 4 livres qui eſt de trois pouces, trouver le poids d'un autre boulet dont le diametre ſera donné, par exemple, de 4 pouces.*

On portera le diametre du boulet de 4 livres ſur les deux mêmes diviſions 4 & 4 de la ligne des ſolides, & le compas de proportion étant ainſi ouvert, on portera le diametre donné de 4 pouces ſur les mêmes lignes ; enſorte que les extrémités de ce diametre tombent auſſi ſur les mêmes diviſions ; ces diviſions donneront le poids du boulet de quatre pouces de diametre.

REMARQUE.

1139. Lorſque l'on ſçait quel eſt le poids d'un boulet, on peut en trouver aiſément le diametre, & lorſqu'on en connoît le diametre en trouver le poids, & ce, par le moyen d'une ligne marquée au bord extérieur des branches du compas de proportion, au commencement de laquelle eſt écrit *poids des boulets*. Elle contient ordinairement les diametres de tous

les boulets, depuis celui du poids d'un quart de livre, juſqu'à celui de 36 : Ainſi pour trouver avec cette ligne le diametre d'un boulet, par exemple de 24 livres, on prendra avec le compas commun l'intervalle depuis le commencement de la ligne juſqu'au N°. 24. & ainſi des autres.

Si le diametre du boulet eſt donné, & qu'on en veuille avoir le poids, on portera la longueur de ce diametre le long de la ligne du poids des boulets en mettant une pointe du compas ordinaire ſur le commencement de cette ligne, & la diviſion qui répondra au point où tombera l'autre pointe du compas ordinaire, & marquera le poids du boulet du diametre donné.

Il eſt évident que dans ces opérations le compas de proportion doit être ouvert de maniere que ſes deux branches ne faſſent qu'une ſeule & même regle.

De l'autre côté de la ligne du poids des boulets eſt une autre ligne, au commencement de laquelle eſt écrit *calibre des pieces*. C'eſt ainſi qu'on nomme le diametre de la bouche du canon. Ce diametre eſt un peu plus grand que celui du boulet, afin que le canon ſe charge aiſément, & que le boulet uſe moins la piece par ſon frotement. Cette ligne des calibres eſt diviſée en même nombre de parties que celle du poids des boulets. Sa premiere diviſion $\frac{1}{4}$ donne le diametre ou le calibre du canon qui chaſſe un boulet d'un quart de livre, la diviſion 24 celui d'une piece d'un boulet de 24, & ainſi des autres diviſions.

SUPPLEMENT

SUR LES CINQ CORPS REGULIERS.

De la meſure de ces Corps, & démonſtration du Problême du N. 985. concernant la maniere de déterminer le côté de chaque corps régulier propre à être inſcrit dans une ſphere dont le diametre eſt donné.

1140. ON a déja vû N. 1082. que chaque corps régulier eſt égal à une pyramide qui a pour baſe la ſurface du corps, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du centre de la ſphere inſcrite ſur une des faces de ce corps. On a donné N°. 1031. la maniere de trouver la ſurface des corps réguliers; il ne s'agit plus ici que de déterminer la perpendiculaire, par le tiers de laquelle il faut multiplier cette ſurface. C'eſt l'objet qu'on ſe propoſe dans ce ſupplément, de même que la démonſtration du problême du N. 985.

PREMIER PROBLEME.

1141. *Trouver le rapport du diametre de la ſphere circonſcrite au tetraëdre, au côté de ce ſolide.*

Soit le tetraëdre X inſcrit dans la ſphere Y, & ſoit prolongé le plan de la baſe CDB de ce ſolide, juſqu'à ce qu'il coupe la ſphere Y. Le plan de cette ſection ſera un cercle dans la circonference duquel le triangle équilatéral CDB de la baſe du tetraëdre ſera inſcrit: Soit AB diametre de ce cercle, dont le centre eſt O, & ſoit tiré AD qui ſera égale au rayon AO, parce que DB étant la corde de 120 degrés, AD ſera celle de 60, qui eſt égale au rayon. Pl. 18. Fig. 5.

Cela fait, on aura le triangle A D B qui ſera rectangle en D, l'angle A D B ayant ſon ſommet à la circonference du cercle, & s'appuyant ſur le diametre A B : Ainſi, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. Comme le diametre A B eſt double de A O ou de ſon égal A D, le quarré de A B ſera quadruple du quarré de A D *, ces quarrés étant entr'eux comme le quarré de 1 qui eſt 1, au quarré de 2 qui eſt 4 : Donc $\overline{AB}^2 = 4\,\overline{AD}^2$. Mettant donc dans l'expreſſion $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$, $4\,\overline{AD}^2$ à la place de $\overline{AB}^2$, l'on aura $4\,\overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$: De ces deux choſes égales retranchant de part & d'autre le quarré de A D, il reſtera $3\,\overline{AD}^2 = \overline{DB}^2$.

* N°. 862.

Préſentement ſi du point P on abbaiſſe ſur ADBCA la perpendiculaire PO prolongée juſqu'en G, elle ſera évidemment le diametre de la ſphere X, & l'on aura le triangle rectangle P O B qui donnera $\overline{PB}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{PO}^2$, ou bien en mettant $3\,\overline{AD}^2$ à la place de $\overline{PB}^2$, & $\overline{AD}^2$ à la place de $\overline{BO}^2$, l'on aura $3\,\overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{PO}^2$, de laquelle expreſſion retranchant le quarré de A D de part & d'autre du ſigne d'égalité, il reſtera $2\,\overline{AD}^2 = \overline{PO}^2$.

Maintenant l'on a par la proprieté du cercle P O. O A :: O A. D G, ou mettant à la place de OA, AD qui lui eſt égal, P O. A D :: A D. O G. Mais lorſque trois grandeurs ſont en proportion continue, le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde,

comme la premiere eſt à la troiſiéme * : Donc $\overline{\overline{PO}}^{2}$, (ou ſon égal) $2\overline{\overline{AD}}^{2}.\overline{\overline{AD}}^{2} :: PO.OG$: Donc OG eſt la moitié de PO : Donc $PG = 3\,OG$. * Nº. 694.

Si l'on tire à préſent GB, le triangle rectangle PBG ſera ſemblable au triangle PBO * ; d'où l'on aura PG ou $3\,OG.PB :: PB.PO$ ou $2\,OG$. le produit des extrêmes & celui des moyens de cette expreſſion, donneront $3\,OG \times 2\,OG = \overline{\overline{PB}}^{2}$; c'eſt-à-dire, que comme 3×2 donne 6, & $\overline{\overline{OG}}^{2} \times OG$ le quarré de OG ou $\overline{\overline{OG}}^{2}$, que $6\,\overline{\overline{OG}}^{2} = \overline{\overline{PB}}^{2}$, ou que, *6 fois le quarré du tiers du diametre de la ſphere circonſcrite, eſt égal au quarré du côté du tetraëdre.* * N. 793.

Premier Corollaire.

1142. Il ſuit de-là, que lorſqu'on connoît le diametre de la ſphere circonſcrite au tetraëdre, on peut trouver le côté de ce ſolide, en trouvant par le problême du N. 875. le côté d'un quarré ſix fois plus grand que celui qui a pour côté le tiers du diametre de cette ſphere ; & réciproquement que lorſqu'on a le côté du tetraëdre, on trouvera le diametre de la ſphere circonſcrite, en trouvant le côté d'un quarré ſix fois plus petit que celui du côté du tetraëdre : car le côté de ce quarré ſera le tiers du diametre cherché : Donc en le triplant, on aura ce diametre.

Second Corollaire.

1143. L'on peut donc, le côté du tetraëdre ou le tetraëdre lui-même étant donné, trouver le diametre de la ſphere circonſcrite. Mais ce diametre étant connu, la hauteur des quatre pyramides qui forment Pl. 18. Fig. 6.

le tetraëdre peut l'être auſſi très-facilement ; car il eſt évident que cette hauteur fait un triangle rectangle avec le rayon de la ſphere & celui du cercle, dans lequel chaque face du tetraëdre eſt inſcrite ; c'eſt pourquoi ſi l'on trace à part une ligne *a o* égale à A O, c'eſt-à-dire, au rayon du cercle dans lequel la face C D B du tetraëdre eſt inſcrite, & ſi l'on éleve au point *o* la perpendiculaire indéfinie *o h*, que du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle de la moitié de P G, on décrive un arc qui coupe *o h* dans un point comme *h*, *o h* ſera évidemment la hauteur de chaque perpendiculaire tirée du centre de la ſphere circonſcrite ſur chacune des faces du tetraëdre ; elle ſera par conſéquent la ligne par le tiers de laquelle il faut multiplier la ſurface totale du tetraëdre pour en avoir la ſolidité.

REMARQUE.

Pl. 18. Fig. 7. 1144. Le tetraëdre étant une pyramide droite dont la baſe eſt connue, lorſqu'on connoît ſon côté, on en peut trouver aiſément la ſolidité ſans le concevoir pour cela inſcrit dans une ſphere.

Fig. 8. Car ſoit le tetraëdre A B D E : du centre C du triangle équilatéral A B D qui lui ſert de baſe, on imaginera la ligne C E tirée du ſommet E au point C ; elle ſera perpendiculaire ſur A B D ; car C eſt à égale diſtance de A, B & D ; E eſt auſſi à égale diſtance des mêmes points ; les lignes E A, E B, & E D étant égales : Donc, &c. Donc le triangle E C A eſt rectangle. Ce triangle étant compoſé du rayon A C de la baſe, du côté E A du tetraëdre qui eſt ſon hypoténuſe, & de la perpendiculaire E C, qui eſt la hauteur du tetraëdre ; on viendra à la connoiſſance de cette hauteur en tirant à part une ligne *a c* = A C ; élévant au point *c* la perpendiculaire indéfinie *c e*,

& décrivant enſuite du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle A E, ou du côté du tetraëdre, un arc qui coupe *c e* dans un point *e*, *c e* ſera égale à C E, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera la hauteur du tetraëdre.

Ainſi multipliant la ſurface du triangle A B C par le tiers de *c e*, on aura de cette maniere la ſolidité du tetraëdre comme par la précedente. Ce qui eſt évident.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

1145. *Une ligne A B étant donnée pour le diametre d'une ſphere dans laquelle il faut inſcrire un tetraëdre, en trouver le côté.*

On diviſera A B en trois parties égales, & l'on prendra B E du tiers de A B; on élévera E D perpendiculaire à A B, & terminée en D par la demi-circonference A D B qui a A B pour diametre. On rirera enſuite A D qui ſera le côté du tetraëdre capable d'être inſcrit dans la ſphere dont A B eſt le diametre. Pl. 19. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Tirez D B, & conſiderez que les triangles rectangles A D B, A D E qui ſont ſemblables donnent A B. Ou 3 B E. A D :: A D. A E, ou 2 B E, ou bien 3 B E. A D :: A D. 2 B E; d'où l'on a, avec le produit des extrêmes & celui des moyens, $6\ BE^2 = AD^2$; c'eſt-à-dire, le quarré de A D égale à ſix quarrés du tiers du diametre A B : Donc A D eſt le côté du tetraëdre capable d'être inſcrit dans la ſphere dont A B eſt le diametre *. C. q. f. d. * Nº. 1141.

REMARQUE.

1146. Il eſt évident que la conſtruction qu'on vient

de donner est la même que celle qui a été prescrite N. 985. & qu'ainsi la démonstration précedente est la démonstration de cette même construction.

QUATRIE'ME COROLLAIRE.

1147. *Le quarré du diametre de la sphere circonscrite est au quarré du côté du tetraëdre, comme 3 est à 2.*

DEMONSTRATION.

Les triangles semblables ADB, ADE donnent AB. AD :: AD. AE; d'où l'on tire à cause de la proportion continue, $AB^2 . AD^2 :: AB^2 . AE^2$. Mais $AB^2 = 3EB^2$ & $AE^2 = 2EB^2$: Donc $AB^2 . AD^2 :: 3EB^2 . 2EB^2$, ou comme 3 est à 2. C. q. f. d.

D'où il suit, que la raison de ces deux quarrés ayant pour exposans 3 & 2, qui ne sont pas des nombres quarrés, leurs racines sont incommensurables entr'elles *, & qu'ainsi elles ne peuvent s'exprimer exactement en nombres.

* N°. 764.

De l'Exaëdre ou du Cube.

1148. Il n'est pas nécessaire, pour mesurer le cube, de le supposer inscrit dans une sphere, puisque pour en avoir la solidité, il ne s'agit que de multiplier sa base par son côté, ce qui n'a aucune difficulté; c'est pourquoi on s'arrêtera seulement ici à déterminer le diametre de la sphere circonscrite au cube, par le moyen du côté de ce solide.

Pl. 19. Fig. 2. Soit le cube AG: tirez la diagonale DB de sa base AC, & la diagonale EB de ce solide. On aura le triangle rectangle EDB dont l'hypoténuse EB sera évidemment le diametre de la sphere circonscrite; car toutes les diagonales du cube seront égales

égales à E B, & elles ſe couperont dans le même point L qui ſera le centre du cube & celui de la ſphere circonſcrite, ce point étant également éloigné de tous les angles du cube.

L'on aura à cauſe du triangle iſoſcelle rectangle $\overline{DAB}$, $\overline{DB}^2 = 2\overline{AB}^2$, (AB étant égal à AD).

A cauſe du triangle rectangle EDB, l'on aura auſſi $\overline{EB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DE}^2$. Mais $\overline{DB}^2 = 2\overline{AB}^2$ & $ED = AB$: Donc $\overline{EB}^2 = 2\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2$, c'eſt-à-dire, que $\overline{EB}^2 = 3\overline{AB}^2$, ou que *le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite eſt égal à trois quarrés du côté du cube inſcrit.*

Premier Corollaire.

1149. Il ſuit de-là, que ſi l'on a le côté d'un cube, pour trouver le diametre de la ſphere dans laquelle il peut être inſcrit,

On cherchera par le problême du N. 875. le côté d'un quarré trois fois plus grand que celui du côté du cube, & que le côté de ce quarré ſera le diametre cherché.

Et de même, que ſi l'on a le diametre d'une ſphere, & qu'on veuille trouver le côté du cube capable d'y être inſcrit,

Il faudra trouver le côté d'un quarré trois fois plus petit que celui du diametre de la ſphere, & que le côté de ce quarré ſera celui du cube cherché.

Second Corollaire.

1150. Si l'on a AB pour diametre d'une ſphere, & qu'on veuille trouver le côté du cube capable d'être inſcrit dans cette ſphere, Pl. 19. Fig. 1.

On décrira le demi-cercle A D B, on prendra B E égale au tiers de A B, on élévera au point E la perpendiculaire E D, & tirant D B, cette ligne ſera le côté du cube inſcrit.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne A D, & conſiderez que les triangles ſemblables A D B, D E B donnent A B. D B :: D B. B E; d'où l'on tire à cauſe de la proportion continue A B. D B :: A B. B E * : Mais A B eſt triple de B E : Donc le quarré de A B eſt auſſi triple de celui de D B : Donc D B eſt le côté du cube inſcrit dans la ſphere, dont A B eſt le diametre.

* N°. 694.

REMARQUE.

Cette démonſtration donne celle de la conſtruction donnée N. 985. qui eſt la même que la précedente.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

1151. *Le diametre de la ſphere circonſcrite & le côté du cube, ſont incommenſurables entr'eux.*

Ce qui eſt évident, puiſque A B. D B :: 3 B E. B E, ou comme 3 eſt à 1. Ces quarrés ont pour expoſans des nombres 3 & 1 qui ne ſont pas quarrés : Donc leurs racines ſont incommenſurables entr'elles : Donc elles ne peuvent s'exprimer exactement en nombres *.

* N. 769.

De l'Octaëdre.

1152. Ce ſolide peut encore être meſuré ſans le concevoir inſcrit dans une ſphere.

Soit l'octaëdre X posé sur un de ses angles G. Il est évident que si on le coupe par un plan qui passe par ses quatre angles A, B, C & D, qu'il sera partagé en deux pyramides égales qui auront chacune pour base le quadrilatere A B C D. Il faut démontrer que ce quadrilatere est un quarré. Pl. 19. Fig. 3.

D'abord ses quatre côtés sont égaux, étant chacun un des côtés de l'octaëdre : ainsi il reste à faire voir que ses quatre angles sont aussi égaux.

Soit pour cela tiré de F en G la ligne F G qui coupera le quadrilatere A C en E : ce point sera également éloigné de tous les angles du quadrilatere A C; car le point F & le point G sont chacun également éloignés du sommet de ces mêmes angles : Donc tous les points de la ligne F G en sont aussi également distans, & par conséquent le point E : Ainsi, si l'on prend ce point E pour centre, & que de l'intervalle E C ou E A, on décrive un cercle, il passera par tous les angles du quadrilatere A B C D, qui sera inscrit dans ce cercle, & l'on aura, à cause de l'égalité des cordes A B, B C, &c. l'arc A B C = A D C : Donc A C sera un diametre : Donc l'angle A B C est droit, puisqu'il s'appuye sur un diametre A C. On démontrera la même chose de tous les autres angles du quadrilatere A C : Donc ce quadrilatere est un quarré.

Présentement si l'on considere le même octaëdre posé sur son angle A, l'on aura le quarré F B G D qui coupera, comme le précedent, l'octaëdre en deux pyramides égales, & qui lui sera égal : D'où il suit, que les diagonales A C & F G de ces deux quarrés sont égales, & par conséquent leurs moitiés A E & E F, & que le point E, qui est à égale distance de tous les angles de l'octaëdre, est le centre de ce solide.

Tout ce qui précede étant bien conçu, il est évi-

dent que pour avoir la ſolidité d'une des deux pyramides qui compoſent l'octaëdre, il faut multiplier le quarré A C par le tiers de la perpendiculaire E F, ou, ce qui eſt la même choſe, par le tiers de la moitié de la diagonale de ce quarré.

Pl. 19. Fig. 4. Pour avoir cette ligne, on fera à part un quarré *a b c d* qui ait pour côté le côté de l'octaëdre. On tirera ſa diagonale *a d*, que l'on coupera en deux également en *e*, & l'on multipliera enſuite le quarré *a b c d* par le tiers de *a e* ou *c d*, ce qui donnera la moitié de la ſolidité de l'octaëdre, & doublant cette ſolidité on a celle du ſolide entier. Ce qui eſt évident.

A l'égard du diametre de la ſphere circonſcrite à l'octaëdre, il eſt évident qu'il eſt le même que F G ou A C, & qu'ainſi on le déterminera par rapport au côté de ce ſolide, en conſidérant le triangle rectangle A E F qui donne $\overline{\text{A F}}^{2} = \overline{\text{A E}}^{2} + \overline{\text{E F}}^{2}$, ou comme $\text{A E} = \text{E F}$, on a $\overline{\text{A F}}^{2} = 2\,\overline{\text{E F}}^{2}$: Mais F G étant double de F E, ſon quarré ſera quadruple de celui de F E, c'eſt-à-dire, qu'il ſera $4\,\overline{\text{E F}}^{2}$: Ainſi *le quarré du diametre F G de la ſphere circonſcrite à l'octaëdre, eſt à celui du côté de ce ſolide, comme* $4\,\overline{E F}^{2}$ *eſt à* $2\,\overline{E F}^{2}$, c'eſt-à-dire, *comme 4 eſt à 2*, ou *comme 2 eſt à 1*, en diviſant chaque terme par 2.

PREMIER COROLLAIRE.

1153. Il ſuit de-là, que le côté de l'octaëdre & le diametre de la ſphere circonſcrite, ſont incommenſurables entr'eux, puiſque leurs quarrés ont pour expoſans les nombres 2 & 1 qui ne ſont pas des nom-

bres quarrés qui ayent pour racine des nombres entiers *.

* N°. 764.

SECOND COROLLAIRE.

1154. Il ſuit auſſi de ce que le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite eſt double de celui du côté de l'octaëdre, que lorſque l'on a un octaëdre, on trouvera le diametre de la ſphere dans laquelle il pourra être inſcrit, en trouvant le côté d'un quarré double de celui du côté de ce ſolide; & réciproquement que ſi l'on a une ſphere dont le diametre ſoit donné, on aura le côté de l'octaëdre capable d'y être inſcrit, en trouvant le côté d'un quarré une fois plus petit que celui du diametre donné.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

1155. D'où il ſuit encore, que ſi l'on a le demi-cercle AFB dont le diametre eſt AB, pour trouver le côté de l'octaëdre capable d'être inſcrit dans la ſphere dont AB eſt le diametre, il faut diviſer cette ligne en deux également en C, éléver la perpendiculaire CF, & tirer FB qui ſera le côté cherché. Pl. 19. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Tirez AF, & conſiderez que les triangles AFB, FCB ſont ſemblables, & qu'ils donnent AB. FB :: FB. CB; d'où l'on tire, à cauſe de la proportion continue*, AB. FB :: AB. CB: Or AB eſt double de CB: Donc le quarré de AB eſt auſſi double de celui de FB: Donc FB eſt le côté de l'octaëdre. C. q. f. d.

* N°. 694.

REMARQUE.

Il eſt évident que cette démonſtration eſt celle de la conſtruction qu'on a donné N. 985. pour trouver

le côté de l'octaëdre, puiſqu'elle eſt la même que la précedente.

Du Dodécaëdre.

1156. Pour bien entendre ce que l'on va dire ſur ce ſolide, il eſt à propos d'en avoir un devant ſoi conſtruit en relief. On en a donné la conſtruction N. 983.

1157. *Trouver le diametre de la ſphere circonſcrite au Dodécaëdre.*

Pl. 19. Fig. 6. Soient conſiderés enſemble quatre faces du dodécaëdre, comme V, X, Y & Z, & ſoit tiré ſur ces faces, les quatre diagonales A B, B C, C D & A D; il faut prouver qu'elles ſont un quarré D B, & pour cela il faut faire voir qu'elles ſont égales entr'elles, & que les angles qu'elles font enſemble ſont droits.

A l'égard de leur égalité, elle eſt évidente, parce qu'elles ſont chacune baſes de triangles qui ont deux côtés égaux, & les angles comptis par ces côtés auſſi égaux, étant angles de la circonference de pentagones réguliers égaux : Donc, &c.

Pour démontrer à préſent que les angles que font enſemble ces diagonales ſont droits, il faut imaginer le dodécaëdre inſcrit dans une ſphere; alors tous ſes angles touchetont la ſurface de cette ſphere, & ſi l'on conçoit qu'elle ſoit coupée par le plan du quadrilatere D B, ſa ſection avec ce plan ſera un cercle dans lequel ce quadrilatere ſera inſcrit; & comme il a ſes quatre côtés égaux, il aura ſes angles droits, car chacun s'appuyera ſur la moitié de la circonference de cette ſection : Donc, &c.

Ceci bien entendu, il faut conſiderer que chaque pentagone peut ſe diviſer en trois triangles par des lignes tirées d'un de ſes angles aux autres angles, &

qu'ainſi comme il y a douze pentagones dans la ſurface du dodécaëdre, elle contiendra 36 triangles tels que le quarré A B C D en contient 6 : D'où il ſuit, qu'il y a ſix faces dans le dodécaëdre telles que le quarré A B C D, qui ſoutiennent chacune ſix triangles des 36 que contient le dodécaëdre, leſquels ſont égaux aux ſix que ſoutient B D. Ces ſix faces étant égales, & perpendiculaires les unes aux autres, ſont un cube inſcrit dans la même ſphere que le dodécaëdre ; enſorte que trouvant le diametre de la ſphere circonſcrite à ce cube, ou, ce qui eſt la même choſe, le diamétre de la ſphere circonſcrite au cube qui a pour côté une des diagonales du pentagone de ce ſolide, on aura celui de celle qui eſt circonſcrite au dodécaëdre. Mais on a donné N. 1149. la maniere de trouver le diametre d'une ſphere circonſcrite à un cube dont le côté eſt donné : Donc on peut par cette même méthode trouver le diametre de la ſphere circonſcrite au dodécaëdre.

PROBLEME.

1158. *Ayant le côté du cube inſcrit dans la même ſphere que le dodécaëdre, trouver le côté de ce ſolide.*

Comme le côté du pentagone eſt égal à la plus grande partie de ſa diagonale coupée en moyenne & extrême raiſon *, on coupera le côté du cube inſcrit dans la ſphere en moyenne & extrême raiſon, & ſa plus grande partie ſera le côté du dodécaëdre inſcrit dans la même ſphere, c'eſt-à-dire, celui du pentagone dont le côté du cube donné eſt la diagonale. * N°. 831.

Ainſi, ſi l'on a un demi-cercle dont A B ſoit le diametre : Pour trouver le côté du dodécaëdre capable d'être inſcrit dans la ſphere dont A B eſt le diametre,

Pl. 19. Fig. 7. Il faut trouver d'abord le côté D B du cube capable d'être inſcrit dans cette ſphere, & le couper en moyenne & extrême raiſon. Sa plus grande partie B I ſera le côté du dodécaëdre capable d'être inſcrit dans la même ſphere. Ce qui eſt évident par tout ce qui précede.

REMARQUE.

1159. Cette même conſtruction a déja été enſeignée N. 985. elle ſe trouve démontrée ici par les deux précedens problêmes.

COROLLAIRE.

1160. Il ſuit des deux problêmes précedens que le côté ou la face du dodécaëdre étant déterminé, pour trouver le diametre de la ſphere dans laquelle ce dodécaëdre peut être inſcrit, il faut trouver le côté A B d'un quarré trois fois plus grand que celui du côté D B de la diagonale d'une de ſes faces, & que le côté A B ſera le diametre cherché.

TROISIE'ME PROBLEME.

1161. *Déterminer la hauteur des douze pyramides dont le dodécaëdre eſt compoſé.*

RESOLUTION.

Fig. 8 & 6. Il faut faire à part un quarré *a b c d* qui ait pour côté une des diagonales A B des faces du dodécaëdre, c'eſt-à-dire, qui ſoit égal à A B C D; tirer ſa diagonale *d b*; à l'extrémité *b* de cette ligne élever *b e* perpendiculaire à *d b*, & égale au côté *b c* du quarré *d e*, & tirer *d e* qui ſera le diametre de la ſphere circonſcrite au dodécaëdre.

Le diametre *d e* étant ainſi trouvé, il faut conſiderer que la ligne cherchée eſt une perpendiculaire

tirée du centre de la ſphere circonſcrite, ſur une des faces du dodécaëdre, ou, ce qui eſt la même choſe, que c'eſt la ligne tirée du centre de cette ſphere au centre de la face du dodécaëdre.

C'eſt pourquoi tirant à part $l\,g$ égale au rayon oblique de la face du dodécaëdre, & élévant au point g la perpendiculaire indéfinie $g\,h$; puis du point l pris pour centre, & de l'intervalle du demi-diametre de la ſphere circonſcrite, décrivant un arc qui coupe $g\,h$ en h, $g\,h$ ſera la hauteur de chacune des douze pyramides qui compoſent le dodécaëdre : enſorte que ſi on multiplie la ſurface de ce ſolide par le tiers de cette ligne $g\,h$ on aura ſa ſolidité. Ce qui eſt évident. Pl. 19. Fig. 9.

De l'Icoſaëdre.

1162. L'Icoſaëdre eſt formé de 20 triangles équilateraux qui ſe réuniſſent 5 à 5, enſorte que chacun de ſes angles ſolides eſt compoſé de cinq triangles.

PREMIER PROBLEME.

1163. *Trouver le diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaëdre.*

Si on poſe l'Icoſaëdre ſur un de ſes angles B, & que pour éviter la confuſion que peut donner la repréſentation de tout le ſolide, on conſidere ſeulement l'angle ſupérieur A. Alors on verra clairement que les baſes des cinq triangles dont cet angle eſt compoſé, font un pentagone régulier C D E F G. Fig. 10, 11 & 12.

Car ſi on imagine que le ſolide ſoit inſcrit dans une ſphere, & que le plan qui paſſe par les baſes de A coupe cette ſphere, cette ſection ſera un cercle dans lequel le polygone C D E F G ſera inſcrit : Mais tous les côtés de ce polygone ſont égaux : Donc

ils diviſent la circonference du cercle en cinq parties égales : Donc, &c.

Pl. 19. Fig. 11. Il ſuit de-là, que le plan qui paſſe par les baſes des triangles dont le ſommet eſt en A, retranche de l'Icoſaëdre une pyramide droite pentagone CDEFGA dont le ſommet eſt auſſi A.

Fig. 10. Si l'on conçoit un plan qui paſſe de même par les baſes des triangles qui forment l'angle ſolide B, on aura l'icoſaëdre partagé en deux pyramides droites égales, & en une eſpece de zone ou ceinture H I K L compriſe entre les baſes de ces deux pyramides, dont la ſurface contient la moitié des triangles de l'Icoſaëdre, c'eſt-à-dire 10, mais avec cette circonſtance que les angles des pentagones qui ſervent de baſes à chaque pyramide & à la zone, ne ſe trouvent pas vis-à-vis les uns des autres ; mais de maniere que ceux de la baſe de la pyramide inférieure répondent au milieu des côtés de la baſe de la pyramide ſupérieure ; enſorte que ſi on retranchoit du ſolide la zone H K, & que les baſes des deux pyramides A & B vinſſent à ſe toucher, elles diviſeroient réciproquement le cercle dans lequel chaque baſe eſt inſcrite, en dix parties égales.

Fig. 12. Cela poſé : ſoient les deux cercles CDEFG, NOP, dans leſquels ſont inſcrits les pentagones des baſes des deux pyramides A & B, & ſoit la pyramide A élevée ſur ſa baſe (on ſupprime B pour ne pas rendre la figure trop diffuſe). Du ſommet A de cette pyramide, on abbaiſſera ſur le centre de ſa baſe, la perpendiculaire A Q, & l'on tirera par E & par Q le diametre E M. On aura alors un triangle rectangle A Q E dont un côté A E, qui eſt celui de l'icoſaëdre, eſt le côté du pentagone inſcrit dans le cercle dont Q eſt le centre, puiſque A E = F E, Q E eſt le côté de l'exagone inſcrit au même cercle. D'où il ſuit que

AQ eſt celui du décagone; car à cauſe du triangle
rectangle, $\overline{AE}^2 = \overline{QE}^2 + \overline{AQ}^2$; & l'on a vû que le quarré du côté du pentagone eſt égal à celui du côté de l'exagone, plus celui du décagone *: Donc AQ eſt celui de ce dernier polygone. * N°. 124.

Ainſi la hauteur de la pyramide ſupérieure A, eſt égale au côté du décagone inſcrit dans le même cercle que ſa baſe. Celle de la baſe inférieure eſt évidemment la même.

La hauteur de ces deux pyramides étant trouvée, il ne faut plus, pour avoir le diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaëdre, que de déterminer la perpendiculaire tirée, ou compriſe entre les baſes de ces pyramides.

Soit diviſé l'arc CD en deux également en R: ſoit abbaiſſé du point R la perpendiculaire RO ſur la baſe inférieure de la zone, qui tombera ſur le point O de la circonference du cercle qui ſert de baſe à la pyramide inférieure; car les deux cercles dans leſquels les baſes des pyramides ſont inſcrites étant égaux & paralleles, de maniere que ſi la zone étoit ſupprimée, ils ſe couvriroient exactement; il s'enſuit que la perpendiculaire qui tombe de la circonference du premier ſur le ſecond, doit néceſſairement tomber ſur la circonference de ce ſecond cercle. Tirez enſuite OD & CD, & conſiderez que COD eſt un des triangles qui forment la zone, & qu'ainſi OD eſt le côté du pentagone inſcrit dans un des cercles des baſes de la zone ou des pyramides: Conſiderez auſſi que RD eſt le côté du décagone inſcrit dans le même cercle; que le triangle ORD eſt rectangle, & qu'ainſi $\overline{OD}^2 = \overline{RD}^2 + \overline{OR}^2$: Mais OD eſt le côté du pentagone, RD celui du décagone inſcrit dans le

même cercle : Donc O R eſt celui de l'exagone où le
* N°. 824. rayon du même cercle * : Donc O R = Q E ou Q M.

1164. Il ſuit de-là, que la ligne A B tirée du ſommet de l'angle ſupérieur A de l'icoſaëdre à ſon oppoſé inférieur B, laquelle eſt évidemment le diametre de la ſphere circonſcrite à ce ſolide, *eſt égale à deux côtés du décagone inſcrit dans le même cercle que celui qui renferme les baſes des cinq triangles qui forment l'angle ſolide A, plus au rayon du même cercle.*

Ainſi le côté de l'icoſaëdre ou d'une de ſes faces étant donné, on trouvera le diametre de la ſphere dans laquelle il pourra être inſcrit, en trouvant d'abord le rayon du cercle qui renferme cinq côtés de ce ſolide, & en lui ajoutant deux fois le côté du décagone inſcrit au même cercle.

COROLLAIRE.

1165. *Le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite à l'icoſaëdre eſt cinq fois plus grand que le quarré du rayon du cercle circonſcrit aux baſes des deux pyramides dont le ſommet eſt en A & en B.*

DEMONSTRATION.

Pl. 9. Fig. 12 Tirez le diametre N E, l'on aura à cauſe du triangle rectangle E M N, $\overline{NE}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{MN}^2$: Or $ME = 2MQ$, & MN, égale MQ : Ainſi mettant dans l'expreſſion $\overline{NE}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{MN}^2$, le quarré de 2 MQ qui eſt $4\overline{MQ}^2$ à la place de $\overline{ME}^2$, & $\overline{MQ}^2$ à la place de $\overline{MN}^2$, l'on aura $\overline{NE}^2 = 4\overline{MQ}^2 + \overline{MQ}^2$: Mais $4\overline{MQ}^2 + \overline{MQ}^2 = 5\overline{MQ}^2$: Donc $\overline{NE}^2 = 5\overline{MQ}^2$. C. q. f. d.

SECOND PROBLEME.

1166. *L'Icoſaëdre étant donné, trouver la hauteur de chacune des 20 pyramides dont il eſt compoſé, & qui ont le ſommet au centre de ce ſolide.*

La hauteur de chacune de ces pyramides eſt évidemment une perpendiculaire tirée du centre du ſolide ſur le centre d'une de ſes faces, c'eſt-à-dire, ſur le centre de chaque triangle dont il eſt entouré : Or, il eſt clair que cette perpendiculaire fait un triangle rectangle avec le rayon oblique de chaque face de l'icoſaëdre, & le demi-diametre de la ſphere circonſcrite : Mais ce ſolide étant donné, le rayon oblique de chacune de ſes faces l'eſt également, le demi-diametre de la ſphere circonſcrite l'eſt auſſi par le problême précedent.

C'eſt pourquoi ſi l'on tire à part une ligne *a b* égale au rayon oblique du triangle équilatéral qui ſert de face à l'icoſaëdre ; qu'au point *b*, on éleve une perpendiculaire indéfinie ; & qu'enſuite du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle du demi-diametre de la ſphere circonſcrite on décrive un arc qui coupe la perpendiculaire *b d* dans un point *d*, *b d* ſera la hauteur cherchée. Pl. 19. Fig. 13.

Ainſi multipliant la ſurface de l'icoſaëdre par le tiers de cette ligne on aura ſa ſolidité.

1167. Il s'agit à préſent de démontrer que par la conſtruction donnée N. 985. A H eſt le côté de l'icoſaëdre inſcrit dans la ſphere dont A B eſt le diametre.

DEMONSTRATION.

Cette conſtruction étant ſuppoſée, ſoit tiré H L perpendiculaire ſur A B, l'on aura les triangles ſemblables C G A, C H L qui donneront C A. C L :: A G. H L, ou en permutant C A. A G :: C L. H L : Fig. 14.

Mais par la conſtruction C A eſt la moitié de A G: Donc C L eſt auſſi la moitié de HL, qui ainſi eſt égale à 2 L C.

Le triangle H L C étant rectangle, & H C ſon hypotenuſe, l'on a $\overline{HC}^2 = \overline{HL}^2 + \overline{LC}^2$, ou comme H L eſt double de L C, ſon quarré ſera quadruple de celui de L C; c'eſt pourquoi on aura $\overline{HC}^2 = 4\overline{LC}^2 + \overline{LC}^2$; ou $\overline{HC}^2 = 5\overline{LC}^2$.

Préſentement, conſiderez que par la même conſtruction enſeignée N. 985. pour trouver le côté du tetraëdre ou celui du cube, E B eſt le tiers de A B: Ainſi C B qui en eſt la moitié, vaudra le tiers de A B, plus la moitié du tiers; car il eſt évident que la moitié d'un tout eſt égal à un tiers, plus à la moitié du même tiers. Si l'on conçoit A B diviſé en douze parties égales, E B en vaudra 4, C B, 6, & par conſéquent C E, 2, c'eſt-à-dire, que C E ſera le tiers de C B: D'où l'on aura le quarré de C B au quarré de C E, comme le quarré de 3 qui eſt 9 eſt au quarré de 1 qui eſt 1 *. Ce qui fait voir que le quarré de C B eſt 9 fois plus grand que celui de C E: Comme C B eſt égale à CH, il s'enſuit que le quarré de C H ne contenant que cinq fois celui de L C, cette ligne eſt plus grande que C E; c'eſt pourquoi prenant ſur C B une partie C K égale à C L, le point K tombera au delà de E.

* N. 857.

On élévera au point K la perpendiculaire K M ſur A B; elle ſera égale à L H, parce qu'elle eſt également éloigné du centre C.

Cela fait, conſiderez que le quarré de H C étant quintuple de celui de L C, le quarré du double de H C, c'eſt-à-dire, celui de A B, ſera auſſi quintuple de celui du double de L C, c'eſt-à-dire de L K.

* N°. 689.

Ainſi l'on aura $\overline{HC}.\overline{LC}::\overline{AB}.\overline{LK}$, ou $5\,\overline{LC}.\overline{LC}::\overline{AB}.\overline{LK}$, ou enfin $5.1::\overline{AB}.\overline{LK}$: Mais l'on a vû ci-devant * que le quarré du diametre de la ſphere étoit quintuple du quarré du rayon du cercle dans lequel ſont inſcrits cinq côtés de l'Icoſaëdre: Donc puiſque le quarré de AB eſt quintuple de celui de LK, LK eſt le rayon de ce cercle. * N°. 1166.

Remarquez préſentement que HL = LK; car HL eſt double de LC de même que LK: Donc, &c. Donc HL eſt le rayon ou le côté de l'exagone inſcrit dans le même cercle qui contient cinq côtés de l'icoſaëdre.

Il reſte à faire voir que AL eſt le côté du décagone inſcrit au même cercle; car alors il s'enſuivra, à cauſe du triangle rectangle ALH, que $\overline{AH}$ ſera égal au quarré du côté de l'exagone, & du côté du décagone inſcrits au même cercle, c'eſt-à-dire, que AH ſera le côté du pentagone inſcrit dans le cercle dont HL eſt le rayon, & par conſéquent le côté de l'icoſaëdre inſcrit dans la ſphere dont AB eſt le diametre.

Mais c'eſt ce qui paroîtra évident, ſi l'on conſidere que le diametre de la ſphere circonſcrite à l'icoſaëdre, contient le rayon du cercle dans lequel ſont inſcrits cinq côtés de ce ſolide, & de plus deux côtés du décagone inſcrit dans le même cercle; car LK eſt le rayon de ce cercle; on vient de le démontrer; AL & KB ſont deux lignes égales qui achevent le diametre de la ſphere circonſcrite: Donc elles ſont chacune le côté du décagone inſcrit dans le cercle dont LK eſt le rayon: Donc AH eſt le côté de l'Icoſaëdre capable d'être inſcrit dans la ſphere dont AB eſt le diametre. C. q. f. d.

LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

LIVRE XIII.

De la Trigonometrie, des Logarithmes, & du Nivellement.

I.

De la Trigonometrie.

ON a déja dit que la Trigonometrie eſt la partie de la Géometrie qui enſeigne à trouver les côtés & les angles des triangles qui ont trois choſes de connues; ſçavoir, ou les trois côtés, ou deux côtés & l'angle compris par ces côtés, ou enfin un côté & deux angles.

1168. Il y a deux ſortes de Trigonometries. La premiere qu'on appelle *rectiligne*, & qui eſt celle dont on ſe propoſe de traiter, conſidere les triangles rectilignes. L'autre qui conſidere des triangles formés ſur

ſur une ſphere par l'interſection de pluſieurs de ſes grands cercles, ſe nomme *Trigonometrie ſpherique*. On ne parlera point de cette derniere, parce que ſes uſages ne ſont d'aucune utilité aux Militaires. Elle ſert principalement dans l'Aſtronomie, la Navigation, la Gnomonique, ou l'Art de faire des Cadrans. Ceux qui voudront l'étudier, pourront recourir au Traité qu'en a donné M. *Deparcieux*. C'eſt un des meilleurs ouvrages que l'on ait ſur cette matiere.

On a donné dans le premier volume N. 251 & ſuivans, la réſolution des principaux problêmes de la Trigonometrie en rapportant ſur le papier, par le moyen d'une échelle, les triangles obſervés ou déterminés ſur le terrain. Il s'agit d'enſeigner ici à réſoudre les mêmes problêmes d'une maniere plus exacte, c'eſt-à-dire, de déterminer par le calcul les côtés & les angles de ces triangles.

DEFINITION.

1169. On appelle *ſinus droit* d'un angle ou d'un arc, ou ſimplement *ſinus*, une perperdiculaire abbaiſſée de l'extrémité d'un des côtés de cet angle, ou de l'arc par lequel il eſt meſuré, ſur le côté ou rayon qui paſſe par l'autre extrémité du même arc.

Ainſi, ſi l'on a l'angle C A B, du ſommet A duquel on décrive l'arc C B qui le meſure, & que de l'extrémité C de cet arc on abbaiſſe ſur le rayon A B qui paſſe par l'autre extrémité, la perpendiculaire C D, elle ſera le ſinus droit de l'arc C B ou de l'angle C A B. Pl. 20. Fig. 1.

1170. La partie D B du rayon A B, ſur lequel tombe perpendiculairement le ſinus droit C D, compriſe entre ce ſinus & l'extrémité B de l'arc C B, ſe nomme le *ſinus verſe* de cet arc, ou de l'angle C A B.

1171. Le *complement* d'un arc B C étant un autre Fig. 2.

arc C E, qui joint avec le premier, acheve le quart de cercle B C E *, la perpendiculaire C H abbaiſſée de l'extrémité C ſur le rayon A E, qui paſſe par l'autre extrémité, ſe nomme le *ſinus du complement* ou le *coſinus* de C B.

* N°. 93.

Comme à cauſe des paralleles A E & D C, H C eſt égale à A D *, il s'enſuit,

* N°. 162.

1172. *Que le ſinus du complement d'un arc ou d'un angle eſt égal à la partie A D du rayon A B, compriſe entre le ſommet A & le ſinus droit D C.*

Pl. 20. Fig. 3.

Si l'on prolonge A B indéfiniment vers L, & ſi l'on acheve le demi-cercle B C L, l'arc C L qui joint avec C B, compoſe la demi-circonference, ou l'angle C A L, qui avec C A B vaut deux angles droits, eſt appellé *le ſupplément de C B* ou de C A B: Or C D eſt une perpendiculaire qui tombe de l'extrémité C de l'arc L C, ſur la ligne L A qui paſſe par l'autre extrémité L; il s'enſuit donc par la définition du ſinus *, que C D eſt celui de C L, & comme elle eſt auſſi le ſinus de l'arc C B, il en réſulte

* N°. 1169.

1173. *Que le ſinus d'un arc ou d'un angle eſt auſſi celui du ſupplément de cet arc ou de cet angle.*

Fig. 4.

1174. Si l'on prolonge indéfiniment le ſinus droit C D, vers G, & de même l'arc C B juſqu'à ſa rencontre en G avec la ligne C G, cette ligne ſera la corde de l'arc CBG. Mais comme AD tombe perpendiculairement du centre A ſur cette ligne, elle la coupe en deux également en D, de même que l'arc C B G en B *: Ainſi C D eſt égale à D G, & C B à B G; mais comme C D eſt le ſinus de l'arc C B, moitié de C B G, il s'enſuit

* N°. 189.

Que le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde d'un arc double.

1175. *Si dans un quart de cercle B C E on prend un arc ou un angle B A M plus grand que B A C, le ſinus M N de B M ſera plus grand que C D ſinus du plus petitang le ou arc B C.*

Pour le démontrer, prolongez le rayon E A en L ; & achevez le demi-cercle E B L. Prolongez auſſi M N en P, & C D en O. Les ſinus M N & C D ſeront les moitiés des cordes M P & C O ; mais la premiere qui eſt plus proche du centre A que la ſeconde, eſt plus grande que cette ſeconde * : Donc ſa moitié M N eſt plus grande que C D : Donc, &c. Pl. 20. Fig. 1.

* N°. 1043.

COROLLAIRE.

1176. Il ſuit de cette propoſition, que le ſinus d'un angle ou d'un arc augmente juſqu'à ce que l'arc ſoit égal au quart de la circonference : Alors il a le rayon pour ſinus ; & comme il eſt le plus grand de tous les ſinus, on le nomme *ſinus total.*

REMARQUE.

1177. Il faut obſerver que l'augmentation des ſinus n'eſt pas proportionnelle à celle des arcs ; car on a fait voir N. 843, que les arcs ne ſont pas, dans le même cercle, en même raiſon que les cordes, & comme les moitiés ſont en même raiſon que leurs Touts, les ſinus ont le même rapport que celui des cordes dont ils ſont la moitié ; par conſéquent ils ne ſont pas entr'eux comme les arcs dont ils ſont ſinus.

1178. On appelle *Tangente* d'un angle ou d'un arc, une perpendiculaire élevée à l'extrémité du rayon ſur lequel tombe le ſinus droit, terminée par le prolongement du rayon qui paſſe par l'autre extrémité de l'arc.

Pl. 29. Fig. 6. Ainſi B F étant élevée perpendiculairement ſur A B au point B, & terminée en F par le prolongement de A C, eſt la tangente de l'angle C A B ou de l'arc B C.

1179. La ligne A F qui termine la tangente B F, & qui eſt auſſi réciproquement terminée par cette tangente, ſe nomme la *ſecante* de l'angle C A B ou de l'arc C B.

1180. Ainſi l'on peut définir cette ſecante une ligne droite tirée du centre d'un arc a une de ſes extrémités, & terminée par une perpendiculaire élevée à l'extrémité du rayon qui paſſe par l'autre extrémité de l'arc.

1181. Il ſuit des définitions précedentes, que le rayon d'un arc, ſa tangente & ſa ſecante, font toujours un triangle rectangle dont la ſecante eſt l'hypoténuſe, & le rayon & la tangente, les deux côtés qui comprennent l'angle droit de ce triangle.

Le complement d'un angle ou d'un arc, a auſſi ſa tangente & ſa ſecante.

1182. La *tangente du complement* eſt encore une perpendiculaire élevée à l'extrémité du rayon de cet arc, laquelle eſt terminée par le rayon prolongé qui paſſe par l'autre extrémité. Ce rayon ainſi prolongé eſt la ſecante du complement.

Fig. 6. Ainſi, ſi l'arc E C ou l'angle E A C eſt le complement de C B, & que E I ſoit élevée perpendiculairement ſur A E au point E, E I ſera la tangente de E C, & A I la ſecante.

Fig. 7. 1183. On a vû N. 1176. que l'arc B C, moindre qu'un quart de cercle, augmentant juſqu'au quart de cercle, ou juſqu'à ce qu'il ait 90 degrés, le ſinus droit C D augmentoit auſſi, & qu'il devenoit égal au rayon, lorſque l'arc étoit parvenu à la grandeur de 90 degrés. Dans cette augmentation de B C la tangente

BF de cet arc devient auſſi plus grande, de même que la ſecante AF : Mais lorſque l'arc eſt parvenu à 90 degrés la tangente BF & la ſecante AF ſont deux lignes perpendiculaires ſur le rayon AB : Donc elles ſont paralleles* : Donc elles ne peuvent plus ſe rencontrer, & par conſéquent ſe terminer ; d'où il ſuit, qu'elles peuvent ſe conſiderer comme infinies, & qu'ainſi l'arc de 90 degrés, n'a ni tangente ni ſecante.

* Nº. 156.

OBSERVATION.

1184. L'objet de toutes les lignes qu'on vient de définir eſt de donner le moyen de déterminer les angles par la connoiſſance de leurs ſinus, tangentes & ſecantes.

Il eſt évident que ſi le ſinus CD eſt donné dans le demi-cercle dont AB eſt le rayon, que l'arc CB le ſera également, & par conſéquent l'angle CAB que cet arc meſure. Il le ſera auſſi par le ſinus verſe DB qui donne le point D d'où part le ſinus CD. Si la tangente BF eſt donnée, la ſecante AF le ſera également, & cette ſecante qui coupe l'arc BC au point C, en déterminera la grandeur CB. Si l'angle eſt obtus, comme LAC, la grandeur de l'arc LC ſera également déterminée par les mêmes lignes. Ainſi on voit que généralement les ſinus, tangentes & ſecantes déterminent la grandeur des angles ou des arcs auſquels ils appartiennent, comme réciproquement ces angles ou ces arcs déterminent la grandeur de ces lignes.

Pl. 20. Fig. 8

1185. Si on ſuppoſe que le rayon CA ou AB ſoit diviſé en un grand nombre de parties égales, & qu'on détermine enſuite par le calcul la quantité des mêmes parties que contiennent les ſinus, tangentes & ſecantes de tous les angles qu'on peut imaginer dans

le quart de cercle, ce calcul donnera en parties du rayon la valeur des mêmes lignes dans tous les cercles differens; car il eſt évident que les ſinus, tangentes & ſecantes d'arcs égaux, ſont des lignes ſemblablement tirées dans les cercles; c'eſt pourquoi leur détermination pour un cercle convient également à toutes les mêmes lignes des autres cercles; mais leur grandeur varie comme celles des circonferences ou des rayons auſquels elles ſont toujours proportionnelles.

Ces parties dans leſquelles on ſuppoſe le rayon ou ſinus total diviſé, ſe nomment *parties de ſinus*. On a calculé des Tables dans leſquelles les ſinus, tangentes & ſecantes de tous les arcs du quart de cercle, ſont ainſi déterminés. On les appelle TABLES DES SINUS, TANGENTES ET SECANTES. On va dire un mot de leur conſtruction pour aider à faire concevoir leur uſage plus aiſément.

Conſtruction des Tables des Sinus, Tangentes & Secantes.

1186. Pour la conſtruction de ces Tables on ſuppoſe le rayon du cercle ou le ſinus total diviſé en 100000 ou 10000000 parties égales; & l'on détermine enſuite par la proprieté des triangles rectangles & des autres lignes tirées dans le cercle, la valeur des ſinus, des tangentes & des ſecantes de tous les arcs, depuis une minute juſqu'à 90 degrés.

1187. On a vû N. 350, que le côté de l'exagone ou la corde de 60 degrés, eſt égal au rayon du cercle; & N. 1174, que le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde d'un arc double.

Fig. 129. P. 359. C'eſt pourquoi ſi dans le cercle X on prend E F égale au rayon C E, l'arc E F que cette corde ſoutient,

ſera de 60 degrés. Si enſuite du centre C on fait tomber le rayon CA perpendiculairement ſur EF, il coupera cette corde en deux également en D, & l'arc qu'elle ſoutient ſera coupé de même en A *. Alors ED moitié de EF ſera le ſinus de l'arc EA, qui eſt de 30 degrés, parce qu'il eſt la moitié de FAE qui en a 60 : Ainſi EF étant de 10000000 parties, le ſinus ED de 30 degrés, qui en eſt la moitié, contiendra 5000000 des mêmes parties. * N°. 189.

1188. Le ſinus de 30 degrés étant ainſi trouvé, on aura facilement celui de ſon complement, c'eſt-à-dire, de l'arc HE de 60 degrés. Pl. 20 Fig. 9.

Car tirant ce ſinus EG perpendiculairement ſur CH, l'on aura CG = DE, & le triangle rectangle CGE donnera $\overline{CE} = \overline{CG} + \overline{EG}$, ou bien en retranchant le quarré de CG de part & d'autre, $\overline{CE} - \overline{CG} = \overline{EG}$, c'eſt-à-dire, qu'on aura le quarré du rayon CE, moins celui du ſinus ED (ou CG qui lui eſt égal) égal au quarré du ſinus GE : Or CE & CG ſont connus, ſçavoir, le premier de 10000000, & le ſecond de 5000000 ; c'eſt pourquoi ayant quarré le premier & le ſecond, & retranché du quarré du premier celui du ſecond, il reſtera le quarré de GE. Extrayant enſuite la racine de ce quarré, elle donnera le ſinus GE de 8660254. C'eſt celui de 60 degrés.

1189. GE étant ainſi connu, il eſt évident que comme il eſt égal à CD, ſi on le retranche du rayon CA, il reſtera le ſinus verſe DA. On le trouvera de 1339746.

1190. Si l'on tire enſuite la corde EA de l'arc EA de 30 degrés, elle ſera double du ſinus de ſa moitié *, c'eſt-à-dire, du ſinus de 15 degrés. * N°. 1174.

Or le triangle E D A étant rectangle, & ſes deux côtés E D & D A étant connus par les opérations précedentes, on aura le quarré de E A en additionnant enſemble les quarrés de E D & de D A *. Et extrayant la racine quarrée de cette ſomme, elle donnera la valeur du côté E A. On le trouvera de 5,176,380. Sa moitié de 2588190, ſera le ſinus de 15 degrés.

* N°. 794.

1191. On trouvera de cette maniere les cordes de tous les arcs dont les ſinus ſeront connus, & par conſéquent les ſinus de la moitié de ces arcs, puiſqu'ils ſont la moitié des cordes qui ſoutiennent des arcs doubles.

1192. Ayant trouvé le ſinus de 15 degrés, on cherchera celui de ſon complement, c'eſt-à-dire, celui de 75 degrés, lequel étant trouvé, ſervira à déterminer le ſinus verſe de 15 degrés; après quoi la corde de 15 degrés pourra ſe trouver, comme on a trouvé celle de 30 degrés. Sa moitié donnera le ſinus de ſept degrés 30 minutes.

1193. Connoiſſant ce ſinus, on déterminera celui de ſon complement ou de 82 degrés 30 minutes, celui de la moitié de ce complement ou de 41 degrés 15 minutes, & le ſinus du complement de ce dernier angle, qui de 48 degrés 45 minutes.

1194. On trouvera auſſi enſuite le ſinus verſe de ſept degrés 30 minutes, lequel ſervira à faire trouver la corde de cet arc, dont la moitié ſera le ſinus de trois degrés 45 minutes. Ce dernier ſinus fera connoître celui de 86 degrés 15 minutes qui en eſt le complement.

1195. On trouvera auſſi par les mêmes méthodes la corde de 75 degrés, & par conſéquent le ſinus de ſa moitié, c'eſt-à-dire, de 37 degrés 30 minutes; celui du complement de cet angle, ou de 52 degrés

30 minutes : Enſuite la corde de 37 degrés 30 minutes, dont la moitié ſera le ſinus de 18 degrés 45 minutes; puis celle de 52 degrés 30 minutes, dont la moitié donnera le ſinus de 26 degrés 15 minutes; enfin les ſupplémens de ces ſinus, &c. Enſorte que la corde de 60 degrés ſera parvenir à la connoiſſance des ſinus des 16 arcs marqués dans la Table ci-deſſous.

1 Corde de 60 degrés avec ſes moitiés.		2 Complemens des arcs de la premiere colonne.		3 Moitiés des complem. précedens.		4 Complemens des arcs de la troiſiéme colonne.		5 Moitiés des complém. précedens.		6 Complémens des arcs de la cinquiéme colon.	
D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.
60											
30											
15		75		37 18	30 45	52 71	30 15	26	15	63	45
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

1196 Il faut à préſent déterminer le ſinus de 45 degrés. Ce ſinus eſt la moitié de la corde de 90 degrés; c'eſt pourquoi trouvant la valeur de cette corde, ſa moitié ſera le ſinus de 45 degrés.

Soit AEB un arc de 90 degrés, dont C eſt le centre, & ſoient tirées à ſe extrémités les lignes CA, CB: Soit auſſi tirée la corde BA; l'on aura le triangle rectangle BCA, dont BA ſera l'hypoté- Pl.20.Fig.18

nuſe, & par conſéquent ſon quarré ſera égal à celui de B C & de C A, ou comme ces lignes ſont égales, il vaudra deux fois le quarré du rayon du cercle.

Ainſi doublant la valeur du quarré du rayon C B ou C A, & extrayant la racine quarrée de la ſomme qui en réſultera, l'on aura B A, dont la moitié ſera le ſinus de 45 degrés, c'eſt-à-dire, en faiſant tomber de C ſur B A la perpendiculaire C D, la valeur de B D ou de D A.

1197. Ayant le ſinus de 45 degrés, on trouvera celui de ſa moitié 22 degrés 30 minutes; enſuite celui de la moitié de cet arc, ou de 11 degrés 15 minutes; puis celui des complemens de ces deux arcs, c'eſt-à-dire, de 67 degrés 30 minutes, & de 78 degrés 45 minutes; celui de la moitié du premier de ces deux arcs, c'eſt-à-dire, de 33 degrés 45 minutes, & enfin celui du complement de ce dernier, qui eſt de 56 degrés 15 minutes.

1198. D'où il ſuit, que la corde de 90 degrés fera connoître les ſinus des ſept arcs ci-deſſous exprimés.

	D.	M.	D.	M.	D.	M	D.	M.
Corde de 90 degrés.	90							
Moitiés de cet arc.			45		22	30	11	15
Complemens.					67	30	78	45
Moitiés des complémens.					33	45		
Complémens des moités des complémens.					56	15		

Il faut chercher maintenant le ſinus de 36 degrés; on trouvera par ſon moyen le ſinus d'un grand nombre d'arcs.

1199. Pour trouver le ſinus de 36 degrés, il faut trouver la corde de 72 degrés, ou le côté du pentagone.

Soit pour cet effet le demi-cercle A E B dans lequel on a trouvé E F pour le côté du pentagone inſcrit, & & cela en pratiquant la conſtruction expliquée & démontrée N. 825. Pl. 20 Fig. 11.

Comme C D eſt la moitié du rayon C B, les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle E C D ſont connus, & comme leurs quarrés pris enſemble ſont égaux à celui de E D *, additionnant ces deux quarrés & extrayant la racine quarrée de la ſomme qui en réſultera, on aura le côté ou l'hypoténuſe E D qui eſt égal à F D. * N°. 794.

Otant après cela C D de F D, il reſtera F C, & alors le côté E F ſera égal à la racine quarrée de la ſomme des quarrés de F C & de E C *; c'eſt pourquoi extrayant cette racine on aura la valeur de E F, c'eſt-à-dire, de la corde de 72 degrés, dont la moitié donnera le ſinus demandé de 36 degrés. * N°. 794.

1200. Ce ſinus fera trouver, en pratiquant les mêmes opérations que celles qui ont été faites ſur la corde de 60 degrés, les ſinus des 32 arcs marqués dans la Table ci-après.

1 Sinus de l'arc de 36 degrés & de les moitiés.		2 Complémens.		3 Moitiés des compl. ou des arcs de la 2e colonne.		4 Complémens de la 3. colonn.		5 Moitiés des compl. de la 3. colonne.		6 Complémens de la 5. colonn.		7 Moitiés des compl. ou des arcs de la 6. colonne.		8 Complémens de la 7. colonn.	
D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.
36		54		27.		63		31. 30 15. 45		58 74	30 15	29	15	60	45
18		72		13. 30 6. 45		76 83	30 15	38. 15		51	45				
9		81		40. 30 20. 15		49 69	30 45	24.	45	65	15				
4	30	85	30	42. 45		47	15								
2	15	87	45												

1201. Si l'on a à préſent le ſinus de 12 degrés, on trouvera par ſon moyen 64 autres ſinus, & l'on en aura après cela 120 qui ſe ſurpaſſeront mutuellement de 45 minutes ; le premier ſera de 45 minutes, & le dernier de 90 degrés.

Soit l'arc A E de 30 degrés, & A G de 54. E G ſera

la corde de 24 degrés, c'eſt-à-dire, de la difference de 54 à 30, dont la moitié donnera le ſinus cherché de 12 degrés. Pl. 21. Fig. 1.

Pour trouver cette corde E G, conſiderez

1°. Que G L eſt la difference des ſinus des deux arcs A E & A G, & que ces ſinus étant connus par les précedentes opérations, leur difference le ſera auſſi.

2°. Que les ſinus E H & K G des complemens de A E & A G érant auſſi connus, leur difference E L le ſera également.

Ainſi dans le triangle rectangle G L E on connoîtra les deux côtés L G, L E; c'eſt pourquoi quarrant ces côtés & les joignans enſemble, on aura le quarré de G E *; extrayant la racine de ce quarré, elle donnera la valeur de la corde G E de 24 degrés. Prenant la moitié de cette valeur, on aura celle du ſinus de 12 degrés. Ce qui eſt évident *. *N°. 794. *N°. 1174.

1202. Ce ſinus étant connu, la Table ſuivante fait voir les 64 arcs, dont il ſert à trouver les ſinus.

mus de 12 deg. avec ſes moitiés.	Compléments.	Moitiés des compléments.	Compléments.	Moitiés.	Compléments.	Moitiés.	Compléments.	Moitiés.	Compléments.	Moitiés.	Compléments.
D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	D. M	D. M.
12	78	39.	51	25. 30	64 30	32. 15	57 45				
				12. 95	77 15						
		19. 30	70 30	35. 15	54 45						
		9. 45	80 15								
6	84	42.	48	24.	66	33.	57	28. 30	61 30	30 4	59 15
								14. 15	75 45		
						16. 30	73 30	36. 45	53 15		
						8. 15	81 45				
		21.	69	34. 30	55 30	27. 45	62 15				
				17. 15	72 45						
		10. 30	79 30	39. 45	50 15						
		5. 13	84 45								
3	87	43. 30	46 30	23. 15	66 45						
		21. 45	68 15								
1 30	88 30	44. 15	45 45								
0 45	89 15										

La Table ſuivante contient les 120 arcs des précedentes dans leur ordre naturel, depuis le premier 45 minutes juſqu'au dernier 90 degrés.

D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.
0.	45	12.	0	23.	15	34.	30	45.	45	57.	0	68.	15	79.	30
1.	30	12.	45	24.	0	35.	15	46.	30	57.	45	69.	0	80.	15
2.	15	13.	30	24.	45	36.	0	47.	15	58.	30	69.	45	81.	0
3.	0	14.	15	25.	30	36.	45	48.	0	59.	15	70.	30	81.	45
3.	45	15.	0	26.	15	37.	30	48.	45	60.	0	71.	15	82.	30
4.	30	15.	45	27.	0	38.	15	49.	30	60.	45	72.	0	83.	15
5.	15	16.	30	27.	45	39.	0	50.	15	61.	30	72.	45	84.	0
6.	0	17.	15	28.	30	39.	45	51.	0	62.	15	73.	30	84.	45
6.	45	18.	0	29.	15	40.	30	51.	45	63.	0	74.	15	85.	30
7.	30	18.	45	30.	0	41.	15	52.	30	63.	45	75.	0	86.	15
8.	15	19.	30	30.	45	42.	0	53.	15	64.	30	75.	45	87.	0
9.	0	20.	15	31.	30	42.	45	54.	0	65.	15	76.	30	87.	45
9.	45	21.	0	32.	15	43.	30	54.	45	66.	0	77.	15	88.	30
10.	30	21.	45	33.	0	44.	15	55.	30	66.	45	78.	0	89.	15
11.	15	22.	30	33.	45	45.	0	56.	15	67.	30	78.	45	90.	0

1203. Il s'agit à préſent de donner la méthode de trouver les ſinus des arcs depuis une minute juſqu'à 45 pour avoir les ſinus depuis une minute juſqu'à 90 degrés.

Ces arcs ſont au nombre de 5400; car comme chaque degré a 60 minutes, 90 multiplié par 60 donnera le nombre des minutes du quart de cercle, & ce nombre ſera trouvé, par la multiplication, de 5400; c'eſt donc celui de tous les ſinus compris dans 90 degrés.

Pour trouver les ſinus des arcs qui ſe ſurpaſſent d'une minute, il faut réſoudre le problême ſuivant.

PROBLEME.

1204. *Connoiſſant les Sinus de deux arcs, deſquels la difference n'excede pas 45 minutes, trouver le ſinus d'un arc quelconque, compris entre le plus grand & le plus petit de ces arcs.*

Pl. 11. Fig. 2. Soient les deux arcs donnés A D & A F dont la difference D F n'a pas plus de 45 minutes : Soit auſſi A E l'arc dont on cherche le ſinus, lequel arc eſt plus grand que A D, & plus petit que A F. Il faut trouver ſon ſinus E M.

RESOLUTION.

Soient menez les ſinus D L & F N, & abbaiſſé de D & E ſur F N les perpendiculaires D H & E G.

L'arc D F n'étant que de 45 minutes au plus, il peut être pris ſans erreur ſenſible pour une ligne droite; ce qui donne, à cauſe des paralleles E M & F N, les triangles ſemblables D H F, D I E, d'où l'on tire cette analogie, D F. D E :: F H. E I. Les trois premiers termes de cette proportion ſont connus; car D F eſt un arc de 45 minutes, qui ſe trouve déterminé en parties de ſinus par les problêmes précedens, & cet arc étant regardé comme une ligne droite, on connoît auſſi ſa partie D E; F H étant la difference des deux ſinus D L & F N qui ſont donnés, ſe trouve également déterminé : Donc en faiſant la regle de proportion précedente, on déterminera la valeur de E I, & ajoutant cette valeur au ſinus D L de l'arc A D, on aura le ſinus de l'arc A E. Ce qui eſt évident.

Si l'on ſuppoſe que l'arc A E ſoit plus grand que A D de 15 minutes, on aura par ce problême le ſinus d'un arc A E plus grand que A D de 15 minutes : D'où il

il ſuit qu'il pourra ſervir à faire trouver les ſinus de tous les arcs du quart de cercle qui ſe ſurpaſſent ſeulement de 15 minutes.

Il ſervira auſſi à trouver de la même maniere les ſinus des arcs qui ſe ſurpaſſent ſeulement de 5 minutes; puis ceux qui ſe ſurpaſſent d'une minute : Enſorte qu'il fera trouver les ſinus de tous les arcs, depuis une minute juſqu'à 90 degrés.

Maniere de déterminer les Tangentes & les Secantes de tous les arcs du quart de cercle.

1205. Les ſinus de toutes les parties du quart de cercle étant connus, il eſt très-aiſé de déterminer la valeur des tangentes & ſecantes de ces parties.

Car ſoit, par exemple, dans le quart de cercle B G un arc quelconque B D, dont le ſinus eſt D F, & celui de ſon complement D H, qui eſt égal à C F, à cauſe des perpendiculaires D F, G C: Soit B E la tangente de cet arc, & C E ſa ſecante; l'on aura deux triangles ſemblables C F D, C B E, qui donneront cette analogie. C F. F D :: C B. B E; c'eſt-à-dire, *que le ſinus du complement eſt au ſinus de l'arc, comme le rayon ou le ſinus total eſt à la tangente.* Pl. 22. Fig. 3.

Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le quatriéme B E, c'eſt-à-dire, la tangente de l'arc B D le ſera également, en faiſant l'opération.

Il eſt évident qu'on trouvera de cette même maniere les tangentes de tous les arcs du quart de cercle.

1026. Les mêmes triangles ſemblables C F D, C B E donnent auſſi C F. C B :: C D. C E, c'eſt-à-dire, *le ſinus du complement eſt au rayon, comme le rayon eſt à la ſecante de l'arc B D.* Comme les trois premiers termes de cette proportion ſont connus, le quatriéme qui eſt la ſecante le ſera par l'opération

de cette regle. C'eſt ainſi qu'on trouvera par une regle de proportion, les ſecantes de toutes les parties du quart de cercle.

1207. Il eſt évident par la proportion précedente *que le rayon ou ſinus total eſt moyen proportionnel entre le ſinus du complement d'un arc, & la ſecante du même arc.*

REMARQUE.

1208. Ce que l'on vient de dire ſur les ſinus, les tangentes & les ſecantes de toutes les parties du quart de cercle, étant ſuffiſant pour donner une idée de la maniere dont on a conſtruit ou pû conſtruire les Tables, il faut donner à préſent la maniere de ſe ſervir de ces Tables, & expliquer l'ordre & l'arrangement qu'on y a obſervé.

Explication de l'arrangement des ſinus, tangentes & ſecantes dans les Tables.

1209. On trouve dans les Tables ordinaires des ſinus, tangentes, &c. quatre colomnes au-deſſus deſquelles eſt marqué, ſçavoir au haut du feuillet de la gauche, & à la premiere colomne auſſi à gauche, le degré de l'arc, & tout de ſuite dans la même colomne les minutes ajoutées à ce degré, ſuivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, &c.

Au haut de la ſeconde colomne eſt écrit *Sinus*, à la troiſiéme *Tangentes*, & à la quatriéme *Secantes*.

Vis-à-vis de chaque minute de la premiere colomne, eſt marqué dans la ſeconde le ſinus de l'arc dont les degrés ſont marqués au haut de la premiere colomne, augmentés des minutes de la colomne des minutes : enſorte que ſi l'on prend, par exemple, un feuillet de la gauche des Tables qui ait un 7 au haut de la premiere colomne, & qu'on prenne 20 dans cette colomne, le

nombre 12764.16 de la ſeconde qui eſt dans le même rang, eſt le ſinus de ſept degrés 20 minutes; le nombre correſpondant de la troiſiéme qui eſt 12869.43, eſt la tangente du même arc, & celui de la quatriéme 100824.71 la ſecante. Il en eſt ainſi des autres.

Dans le feuillet de la droite les degrés ſont écrits au bas de la premiere colomne à gauche, & les minutes vont en augmentant de bas en haut : Mais les degrés des arcs ſont arrangés de maniere, dans les deux feuillets de la droite & de la gauche, que les ſinus, tangentes & ſecantes des arcs des complemens du feuillet de la gauche ſont dans le feuillet de la droite, & dans le même rang ou la même ligne droite de ces feuillets.

Ainſi dans le rang du feuillet de la droite qui ſuit immédiatement celui de la gauche où l'on a trouvé les ſinus, tangente & ſecante d'un arc de ſept degrés 20 minutes, on trouve les ſinus, tangente & ſecante de 82 degrés 40 minutes, qui eſt le complement de ſept degrés 20 minutes.

REMARQUES.

I.

1210. On trouve dans les chiffres des colomnes des Tables qui expriment les ſinus, tangentes & ſecantes, deux chiffres à droite ſéparés des autres par un point. La raiſon de cette ſéparation, c'eſt que pour avoir les ſinus, tangentes & ſecantes plus exactement ; on a ſuppoſé dans le calcul des Tables que le rayon étoit diviſé en 10,000,000 de parties égales; Mais comme dans les calculs ordinaires de la Géometrie pratique, on peut, ſans erreur ſenſible, le ſuppoſer diviſé ſeulement en 100,000 parties, cette diminution de deux zeros dans le rayon, pro-

duit la diminution des deux chiffres retranchés dans les tables. Ainſi dans les opérations ordinaires on ne prend point ces deux chiffres, c'eſt-à-dire, qu'on conſidere le rayon du ſinus total comme diviſé en 100000 parties au lieu de 10,000,000. C'eſt ainſi qu'on le conſiderera dans les opérations trigonometriques qu'on fera dans la ſuite de ce Traité. De ſorte que, par exemple, le ſinus de 11 degrés 30 minutes ſera pris ſeulement de 19936, & ainſi des autres.

II.

1211. Lorſque l'on a un ſinus, une tangente, ou une ſecante en parties de ſinus, on trouve l'arc auquel ces lignes appartiennent en cherchant dans les colomnes des Tables le nombre le plus approchant de celui qu'on a; c'eſt-à-dire, le ſinus le plus approchant ſi c'eſt un ſinus, la tangente ſi c'eſt une tangente, &c. & les degrés de la colomne joints aux minutes qui ſe trouveront dans le rang du ſinus, ou de la tangente, &c. qu'on aura choiſie, donneront l'arc auquel le nombre propoſé appartiendra.

Suppoſons, par exemple, qu'on ait un ſinus exprimé par 49120; on cherchera dans les Tables le ſinus le plus approchant de ce nombre : on trouvera 49115, qui répond à un arc ou un angle de 29 degrés 25 minutes. C'eſt l'angle auquel répond auſſi le ſinus propoſé. Il en ſera de même pour les tangentes & ſecantes.

AVERTISSEMENT.

1212. Les Tables des ſinus, tangentes & ſecantes dont on vient de donner la conſtruction & l'uſage, ſont ſuffiſantes pour réſoudre les problêmes de la Trigonometrie. Mais il y a une méthode plus abrégée de réſoudre les mêmes problêmes, & de faire

tous les autres calculs de la Géometrie, qu'il eſt fort important de connoître. On va l'expliquer dans l'article ſuivant *des Logarithmes*. Ceux qui voudront ſe contenter des Tables des ſinus pourront paſſer cet article; mais ceux qui voudront bien y donner quelque attention, ſeront bien récompenſés du tems qu'ils y employeront par la beauté & l'utilité de l'invention qui en fait le ſujet.

II.

DES LOGARITHMES.

1213. ON appelle *Logarithmes* des nombres en progreſſion arithmetique qui répondent à d'autres nombres en progreſſion géometrique, & par le moyen deſquels on ſubſtitue dans le calcul l'addition & la ſouſtraction à la multiplication & à la diviſion.

1214. Il faut ſe rappeller que ce qui ſe fait par la multiplication & la diviſion dans la proportion géometrique, ſe fait par addition & ſouſtraction dans la proportion arithmetique.

Car dans la premiere, il faut, pour trouver un quatriéme proportionnel à trois termes donnés, multiplier les deux derniers enſemble, & diviſer leur produit par le premier terme *. Et dans la ſeconde proportion, il faut ſeulement ajouter enſemble les deux derniers termes & retrancher le premier de leur ſomme, le reſte donne le quatriéme proportionnel demandé *.

* N°. 663.

* N°. 733.

1215. Les differentes proprietés de ces deux proportions ou progreſſions engagerent au commence-

ment du 17e siecle *Jean Neper*, Baron de Merchiston, Ecossois, de chercher à simplifier & à abreger les calculs dans les opérations géometriques, en en retranchant la multiplication & la division, c'est-à-dire en se servant, à la place de ces Regles, de l'addition & de la soustraction. C'est ce qu'il fit par l'invention des Logarithmes, dont il est l'Auteur, & dont il donna le premier Traité en 1614. L'idée de *Neper* ayant été adoptée aussi-tôt par tous les Mathématiciens de son tems, qui sentirent l'avantage qui en résultoit dans les Mathématiques pratiques, c'est-à-dire, où il s'agit d'opérer par le calcul; les plus célebres s'appliquerent à la perfectionner, & à augmenter les Tables de cet Auteur. C'est la construction & l'usage de ces Tables qu'on se propose d'expliquer dans cet article.

CONSTRUCTION de la Table des Logarithmes.

1216. Quoiqu'on soit maître de choisir pour la construction des Tables des Logarithmes telle progression géometrique & arithmetique que l'on veut, on prend ordinairement la progression géometrique ∴ 1. 10. 100. 1000, &c. & l'Arithmetique ∴ 0. 1. 2. 3. 4, &c. ou afin de pouvoir négliger, sans erreur sensible, les restes qui se trouvent dans les opérations qu'on fait pour déterminer les Logarithmes, on suppose la progression arithmetique ∴ 0.000000. 1.000000. 2.000000, &c. c'est-à-dire, qu'on ajoute six zeros à chaque terme de ∴ 0. 1. 2, &c. ce qui conserve encore la progression; car ces termes different toujours entr'eux d'une même quantité.

1217. Les termes de la progression arithmetique

qui répondent à chacun de ceux de la géometrique, en ſont appellés les *Logarithmes*.

Ainſi le logarithme de 10 eſt 1.000000; celui de 100, 2.000000, & ainſi des autres.

Il eſt évidenr qu'en continuant la ſuite des termes des deux progreſſions arithmetique & géometrique, on aura tous les logarithmes des nombres des termes de la proportien géometrique, c'eſt à-dire de 1, de 10, 100, 1000, 10000, &c. Mais il s'agit d'avoir auſſi les logarithmes dès termes intermediaires, ou des nombres qui ſont entre 1 & 10; entre 10 & 100; entre 100 & 1000, &c.

1218. Pour trouver d'abord les logarithmes des nombres qui ſont entre 1 & 10, il faut chercher des moyens géometriques entre ces deux nombres, & des moyens arithmetiques correſpondans entre 0.000000 & 1.000000, ou 0000000 & 1000000.

Par exemple, pour trouver le logarithme de 2, il faut chercher un moyen géometrique entre 1 & 10. Il ſera égal à la racine quarrée du produit de ces deux quantités *; Mais ce produit étant 10, qui n'a pas pour ſa racine un nombre entier, il faut trouver ſa racine approchée par l'approximation des racines quarrées expliquée N. 500. * N°. 671.

Pour avoir cette racine, ſans erreur ſenſible, on ajoutera quatorze zeros au produit 10; il deviendra 100000000000000, dont la racine quarrée 31622760 étant diviſée par 10000000, donnera pour celle de 10, $\frac{31622760}{10000000}$ *, ou en décimales, 3.1622760. * N°. 500.

Préſentement pour trouver le terme de la progreſſion arithmetique correſpondant à ce moyen géometrique, c'eſt-à-dire, le moyen arithmetique entre le premier & le ſecond terme de cette progreſſion, il faut ajouter enſemble ces deux termes, & prendre la moitié de leur ſomme *. Le nombre * N°. 734.

500000 qui en réſultera, ſera le terme correſpondant au moyen géometrique qu'on vient de trouver, & il en ſera par conſéquent le logarithme.

La fraction $\frac{3162276}{10000000}$ étant plus grande que 2, & le nombre 1 ou $\frac{10000000}{10000000}$ étant plus petit que 2, on cherchera un nouveau moyen géometrique entre ces deux fractions, & de même un nouveau moyen arithmetique entre les deux termes de la progreſſion arithmetique correſpondans, c'eſt-à-dire, entre 0.000000 & 500000. On trouvera $\frac{17782789}{10000000}$ pour le moyen géometrique, & 250000 pour le moyen arithmetique correſpondant qui en ſera le logarithme.

On réïterera les mêmes opérations ſur les fractions plus petites & plus grandes que 2, & ſur leurs logarithmes, & cela, juſqu'à la 23e opération, où l'extraction de la racine donnera $\frac{20000000}{10000000} = 2$; le moyen arithmetique qui correſpondra à cette racine, & qui en ſera le logarithme, ſera 3010300.

On trouvera par la même méthode les logarithmes de 3, de 7, de 9, de 11, 13, &c.

1219. On ne parle pas des logarithmes de 4, 6, 8, &c. parce que lorſqu'on a le logarithme de 2, on a celui de 4 en le doublant; qu'ayant celui de 3, on a celui de 6 en ajoutant enſemble ceux de 2 & de 3; celui de 8 en ajoutant les logarithmes de 2 & de 4, &c.

Car comme l'addition répond, dans la progreſſion arithmetique, à la multiplication dans la géometrique, il s'enſuit que la multiplication de deux termes de la premiere donne un produit qui répond à l'addition des deux termes correſpondans de la progreſſion arithmetique, c'eſt-à-dire, de leurs logarithmes: Or 2 multiplié par 2, eſt égal à 4: Donc le logarithme de 2 ajouté à lui-même, ou multiplié par 2, donne celui de 4. Il en eſt de mê-

me de celui de 2 ajouté à celui de 3, qui donne celui de 6, & ainſi des autres.

1220. Les logarithmes de 2 & de 10 étant connus, on aura celui de 5 en ôtant du logarithme de 10 le logarithme de 2.

Car comme la ſouſtraction répond dans la progreſſion arithmetique, à la diviſion dans la géometrique, & que diviſant 10 par 2 on a le nombre 5; il s'enſuit qu'ôtant ou ſouſtrayant du logarithme de 10 celui de 2, il reſte le logarithme de 5.

Il ſuit de ce qui vient d'être expliqué dans les N°. 1217 & 1220,

1221. 1°. Qu'on trouvera le logarithme de tous les nombres produits par la multiplication d'autres nombres dont les logarithmes ſeront connus, en additionnant enſemble ces logarithmes; qu'ainſi on aura le logarithme du quarré ou d'un cube d'un nombre, dont le logarithme ſera connu, en doublant ou triplant ce logarithme.

1222. Et 2°. Que lorſqu'on connoîtra le logarithme d'un nombre formé du produit de deux autres nombres, avec le logarithme d'un de ces nombres; on connoîtra auſſi le logarithme du ſecond nombre, en retranchant du logarithme du nombre conſideré comme le produit des deux autres, le logarithme de celui de ces deux nombres qui ſera connu; le reſte ſera le logarithme de l'autre nombre: Qu'ainſi connoiſſant le logarithme du quarré ou du cube d'un nombre quelconque, on aura le logarithme de ſa racine quarrée ou cubique, en prenant la moitié ou le tiers de ſon logarithme.

1223. En ſuivant la méthode dont on vient de donner un précis, on trouveroit les logarithmes de tous les nombres, & on pourroit ainſi en former des Tables; mais il n'eſt pas queſtion de ce travail qui

ſeroit extrêmement long, & qui ſe trouve tout fait. Dieu ayant ſuſcité pour le bien public, comme le dit un Auteur célebre (*a*), des perſonnes à qui il a donné aſſez de patience pour en ſurmonter l'ennui ; *Car nous ſçavons*, ajoute-t'il, *que plus de vingt perſonnes gagées pour cela, ont paſſé plus de 20 ans à calculer avec une aſſiduité infatigable.* Il ne s'agir donc ici que de bien concevoir la méthode que ces Calculateurs ont tenue ou qu'ils ont pû tenir (car il y en a pluſieurs), afin d'entendre plus aiſément les uſages des Tables des logarithmes. Ce ſont ſeulement ces uſages qu'on ſe propoſe d'expliquer dans cet article, après avoir fait quelques obſervations ou remarques ſur la forme ou l'arrangement qu'on donne aux logarithmes dans les Tables.

REMARQUES.

I.

1224. Dans la plûpart des Tables des logarithmes on trouve le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, ſéparé des autres chiffres par un point comme dans le logarithme 1.53147. Ce chiffre ſe nomme *caracteriſtique* ou *figurative.* Il a toujours autant d'unités que le nombre auquel le logarithme appartient, contient de chiffres après le premier de la gauche.

Pour le prouver, il faut conſidérer la progreſſion géometrique A, dont

A	B
1.	0. 0 0 0 0 0 0
1 0	1. 0 0 0 0 0 0
1 0 0	2. 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0	3. 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0, &c.	4. 0 0 0 0 0 0, &c.

(*a*) Le Pere Pardies.

on s'eſt ſervie pour la conſtruction des Tables, & l'Arithmetique B qu'on a auſſi choiſie pour répondre dans la même conſtruction à la géometrique A.

Dans la progreſſion A, chaque terme augmente d'un zero, ou ce qui eſt la même choſe, il eſt dix fois plus grand que celui qu'il précede immédiatement. Dans la progreſſion B, dont le premier terme eſt zero, chaque premier chiffre à gauche des termes de cette progreſſion ſurpaſſe celui qu'il précede; ſeulement d'une unité: D'où il ſuit, qu'à meſure que les termes de la progreſſion géometrique augmentent d'un chiffre, le premier à gauche des termes correſpondans de la progreſſion arithmetique augmente d'une unité: Or, comme le premier terme de cette progreſſion eſt zero; il en réſulte que la figurative dans les logarithmes contient autant d'unités que le nombre qui répond au logarithme auquel elle appartient, contient de chiffres après le premier à gauche.

II.

1225. Il faut auſſi remarquer que lorſque des nombres ne different entr'eux que par des zeros poſés à leur droite, ou ce qui eſt la même choſe, qu'il y en a qui ſont multipliés par 10, par 100, par 1000, &c. les logarithmes de ces nombres ſont les mêmes, & qu'il n'y a que le figurative qui change.

Car ſuivant ce qu'on vient de voir dans la remarque précedente, ſi l'on a, par exemple 10, dont le logarithme eſt 1.000000, il eſt évident que ſi au lieu de ce nombre on avoit 100 ou 1000, &c. ce logarithme deviendroit 2.000000 ou 3.000000, &c.

III.

1226. Les logarithmes des premiers nombres ont

des differences beaucoup plus grandes que celles des derniers.

La raiſon en eſt évidente par la conſtruction des Tables des logarithmes; car prenant les deux progreſſions géometrique & arithmetique ∴ 1. 10. 100. 1000, &c. ∴ 0. 2. 3. 4, &c. qui ont ſervies à la conſtruction de ces Tables, il eſt aiſé d'obſerver

1°. Qu'il a fallu trouver huit moyens proportionnels entre les deux premiers termes 1 & 10 de la progreſſion géometrique, & de même huit moyens arithmetiques entre 0 & 1, & que comme chaque terme de la progreſſion arithmetique ne ſurpaſſe celui de la gauche qu'il précede à droite que d'une unité, les logarithmes des nombres entre 1 & 10 ne ſont que des parties de l'unité, qui correſpond ainſi aux huit nombres qui ſe trouvent entre 1 & 10.

2°. Qu'entre 10 & 100 il y a 88 nombres dont les logarithmes ſont entre 1 & 2, c'eſt-à-dire, que l'unité correſpond alors à 88 termes.

3°. Qu'entre 100 & 1000 il y a 898 nombres dont les logarithmes ſont entre 2 & 3 : Ainſi dans ce cas l'unité correſpond à 898 termes.

En continuant de la même maniere cet examen, on verra que l'unité correſpondra à d'autant plus de nombres que la progreſſion géometrique ira en augmentant, ou qu'elle aura plus de termes : D'où l'on voit que ſes parties ſont d'autant plus petites qu'elles appartiennent à des termes plus éloignés du premier: Or ces parties ſont les differences des logarithmes qui ſe ſuivent immédiatement : Donc elles ſont plus petites dans les grands nombres que dans les petits.

IV.

1227. Il eſt à propos d'obſerver auſſi que les logarithmes qui ſe ſuivent dans les Tables ne ſont pas en

progreſſion arithmetique, & qu'ils ne doivent pas y être; parce que ſuivant la définition des logarithmes ce ſont des nombres en progreſſion arithmetique qui répondent à d'autres nombres en progreſſion géometrique: Or, ſi l'on prend dans la Table des logarithmes, par exemple, dans la premiere page, les nombres 4, 5, 6, 7, 8 & 9, dont les logarithmes marqués à côté ſont 060206, 069897, 077815, 084509, 090309 & 095424, ces logarithmes ne ſont pas en progreſſion arithmetique; car ils ne different pas de la même quantité; mais les nombres 4, 5, 6, 7, &c. ne ſont pas non plus en progreſſion géometrique. Si l'on choiſit parmi ces chiffres les nombres 4, 6 & 9 qui ſont en proportion géometrique, on verra que les logarithmes 060206, 077815 & 095424 qui leur répondent, ſont également en proportion arithmetique, parce qu'ils different d'une même quantité 17609. Ainſi il n'y a que les nombres qui ſont en progreſſion géometrique dans les Tables, auſquels répondent des logarithmes auſſi en progreſſion arithmetique. Ce qui eſt conforme à la définition des logarithmes.

Toutes ces obſervations étant bien conçues, on va donner pluſieurs problêmes pour achever d'expliquer l'uſage des logarithmes, & pour aider les commençans à ſe familiariſer avec les opérations qui les concernent.

PREMIER PROBLEME.

1228. *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

Avant de réſoudre ce problême, il faut obſerver que les Tables des logarithmes ne contiennent pas les logarithmes de tous les nombres à l'infini; mais ſeulement juſqu'à 10000 ou 20000; c'eſt pourquoi

on ne peut trouver dans ces Tables que les logarithmes des nombres plus petits que 10000 ou 20000. Lorſqu'on a de plus grands nombres, leurs logarithmes ſe trouvent par une opération qu'on va bien-tôt expliquer.

1229. On ſuppoſe d'abord que le nombre donné, dont on cherche le logarithme, eſt moindre que 20000; qu'il eſt, par exemple, 15184.

On cherchera dans les nombres des Tables le propoſé 15184; & le logarithme 4.18138 ou 418138 qui lui répond, ou qui eſt à côté dans la colomne voiſine à droite, ſera le logarithme de 15184.

1230. Si le nombre propoſé eſt plus grand que 20000, ſon logarithme ne ſe trouvera point dans dans la Table. Voici la maniere de ſuppléer aux Tables dans les cas de cette eſpece.

Il faut chercher à diviſer le nombre propoſé par des nombres ou des quantités qui étant moindres que les nombres des Tables, donnent auſſi un quotient plus petit que le plus grand nombre des mêmes Tables.

Si la diviſion ſe fait exactement, il faut prendre le logarithme du diviſeur, celui du quotient, & les ajouter enſemble; la ſomme qui en réſultera, ſera le logarithme du nombre propoſé *.

* N°. 1221.

Soit, par exemple, le nombre 98765 dont on veut avoir le logarithme.

On cherchera à le diviſer par 2, par 3; & comme ces diviſions ne donnent point de quotient exact, on eſſayera de le diviſer auſſi par 5, ce qui donnera le quotient exact 19753.

On prendra dans les Tables le logarithme de ce nombre, qui eſt 42956331; on lui ajoutera celui de 5, qui eſt 6989700: leur ſomme 49946031

ſera le logarithme du nombre propoſé 98765.

Si les diviſions donnent des quotients trop grands, c'eſt-à-dire, qui ne ſe trouvent point dans les Tables, ou ſi l'on veut éviter de chercher des diviſeurs exacts, on operera de la maniere ſuivante.

1231. Soit, par exemple, le nombre 3255682, dont on veut avoir le logarithme.

Il faut retrancher les trois derniers chiffres de la droite de ce nombre, c'eſt-à-dire, dans cet exemple 682, afin qu'il reſte un nombre 3255, moindre que 20000, ou qui puiſſe ſe trouver dans les Tables.

Ce retranchement opere la même choſe que ſi on avoit diviſé le nombre propoſé 3255682 par 1000, pourvû qu'on lui ajoute les trois chiffres retranchés, diviſés auſſi par 1000, c'eſt-à-dire, la fraction $\frac{682}{1000}$. Car $\frac{3255682}{1000}$ eſt égal à 3255, plus $\frac{682}{1000}$.

On prend enſuite le logarithme de 3255, qui eſt 35,125,510; on lui ajoute celui du nombre 1000, qui eſt 30,000,000, ce qui donne 65125510 pour la ſomme de ces deux logarithmes, laquelle donne le logarithme du produit de ces deux nombres *, c'eſt-à-dire, de 3255000. Ainſi l'on a déja le logarithme de la plus grande partie du nombre propoſé 3255682, qui eſt égal à 3255000, plus 682. Il ne s'agit plus que de trouver ce que cette partie 682, ajoutée à 3255000, ajoutera au logarithme de ce dernier nombre.

35125510
30000000
65125510

* N°. 1221.

Pour cela on prend le logarithme de 3256, nombre plus grand d'une unité que 3255 : ce logarithme eſt 35126844; on lui ajoute auſſi celui de 1000, & l'on

35126844
30000000
65126844

a 65126844 pour la ſomme de ces deux logarithmes. C'eſt celui du produit de 3256 par 1000, ou de 3256000.

6 5 1 2 6 8 4 4	
6 5 1 2 5 5 1 0	
Différence	1 3 3 4

Préſentement, on prend la différence des logarithmes de 3256000 & 3255000, c'eſt-à-dire, de 65126844 & 65125510, qui eſt 1334, & l'on fait une regle de Trois ou de proportion, dont le premier terme eſt 1000, c'eſt-à-dire, celui qu'on a ajouté à 3255000, le ſecond la différence 1334, & le troiſiéme 682, ou les trois chiffres retranchés du nombre propoſé. Le quatriéme terme de cette regle donne ce qu'il faut ajouter au logarithme de 3255000, pour avoir celui de 3255682.

1000. 1334 :: 682. x.

Faiſant l'opération, on trouve 909 pour la valeur du quatriéme terme de cette regle : c'eſt le nombre qu'il faut ajouter au logarithme de 3255000, pour avoir celui du nombre propoſé qui ſera ainſi, 65126419.

1232. Si le nombre propoſé avoit été compoſé de huit chiffres, comme, par exemple, 56789769, on auroit retranché les quatre derniers à droite 9769, & l'on auroit operé ſur les quatre premiers, comme on vient de le faire dans l'exemple précédent; & pour les quatre retranchés, de la même maniere que pour les trois du même exemple.

REMARQUES.

I.

1233. Lorſqu'on ſe ſert des Tables ordinaires des logarithmes, c'eſt-à-dire, de celles qui contiennent

nent les logarithmes des nombres juſqu'à 10000 ou 20000, (car il y en a de grandes qui vont juſqu'à 100000) on ne peut trouver par l'opération qu'on vient d'enſeigner, les logarithmes des nombres qui ne ſont pas dans les Tables, que lorſqu'ils ſont moindres que 200,000,000, ſi l'on a les Tables où les logarithmes vont juſqu'à 20000, & moindre que 100000000, ſi les Tables ne contiennent les logarithmes que juſqu'à 10000.

Pour le démontrer, ſoit le nombre propoſé 337,456,078, plus grand que 200000000. Si l'on retranche les quatre derniers chiffres de ſa droite, on l'aura diviſé par 10000; mais on aura pour quotient le nombre 33745, qui ne ſe trouve pas dans les Tables. Si au lieu de quatre chiffres on lui en ôtoit cinq, on l'auroit diviſé par 100000, nombre qui ne ſe trouve pas non plus dans les Tables: Donc, &c.

Si l'on a de même le nombre 117091700, par exemple, qui eſt plus grand que 100000000, on ne pourra pas trouver ſon logarithme avec les Tables qui ne les contiennent que juſqu'à 10000; parce que ſi l'on en retranche les quatre derniers chiffres à droite, il reſtera le nombre 11709, plus grand que 10000, & par conſéquent qui ne ſe trouvera point dans les Tables. Il en ſera de même de tous les autres nombres plus grand que 100000000: Donc, &c.

II.

1234. Il eſt clair que la méthode qu'on vient de donner pour trouver les logarithmes des nombres qui ne ſe trouvent pas dans les Tables, ſuppoſe que les différences des logarithmes ſont proportionnelles à l'augmentation des nombres; & c'eſt ce qui eſt ſenſiblement vrai dans ceux qui ſont au-deſſus de

1000; car on peut voir dans les Tables que plus les nombres ſont grands, plus les augmentations de leurs logarithmes ſont régulieres. Or la méthode dont il s'agit n'a lieu que dans les grands nombres; elle peut donc alors être conſiderée comme exacte.

III.

1235. C'eſt par ce problême qu'on a trouvé les logarithmes des ſinus & des tangentes; mais il faut obſerver que pour trouver ces logarithmes plus exactement, on a ſuppoſé le rayon du cercle diviſé en 10000000000, c'eſt-à-dire, en mille fois plus de parties qu'il n'eſt marqué dans les Tables, & que c'eſt ſur ce rayon que les ſinus & les tangentes ont été calculés. C'eſt pourquoi ſi l'on veut verifier quelques ſinus ou tangentes, c'eſt-à-dire, en chercher ſoi-même le logarithme, il faut commencer par ajouter trois zeros au ſinus ou à la tangente des Tables, & operer enſuite ſur ce ſinus ou cette tangente ainſi augmenté, pour trouver ſon logarithme, ſuivant la méthode du préſent problême.

IV.

1236. On ne trouve point dans les Tables les logarithmes des ſecantes, parce qu'on peut s'en paſſer aiſément dans la réſolution des triangles; mais ſi on vouloit les avoir, il faudroit doubler le logarithme du rayon, & en retrancher celui du ſinus du complement; le reſte ſeroit le logarithme de la ſecante.

Car le ſinus du complement, le rayon, & la ſecante étant en proportion continue géométrique *, leurs logarithmes feront une pareille proportion arithmetique, dont le premier terme ſera le logarithme du ſinus du complement; le ſecond ou moyen,

* 1207.

celui du rayon; & le troiſiéme, le logarithme de la ſecante. Mais le troiſiéme terme d'une proportion continue arithmétique eſt égal au double du ſecond, moins le premier terme * : Donc le logarithme de la ſecante eſt égal au double de celui du rayon moins le logarithme du ſinus du complement. *N°. 735.

SECOND PROBLEME.

1237. *Trouver le logarithme d'un nombre qui contient des entiers & des fractions, par exemple, de 37 toiſes* $\frac{4}{7}$.

Il faut réduire les entiers en fraction, & les joindre avec celle dont ils ſont accompagnés, pour en faire une ſeule $\frac{263}{7}$; chercher enſuite le logarithme du numérateur 263, en retrancher celui du dénominateur 7; le reſte ſera le logarithme du nombre propoſé : ce qui eſt évident *. *N°. 1222.

REMARQUES.

I.

1238. On trouvera de la même maniere le logarithme d'une fraction quelconque moindre qu'un nombre entier; mais comme alors le numérateur eſt plus petit que le dénominateur, on ne peut retrancher le logarithme du ſecond terme de celui du premier. C'eſt pourquoi on fait préceder dans ce cas le logarithme du dénominateur du ſigne —— appellé *moins*, qui exprime le retranchement de la quantité qu'il précede à gauche de celle dont il eſt précedé vers le même côté. Et comme la quantité qu'il précede à gauche eſt la plus grande, dans les cas dont il s'agit, elle détruit entierement l'autre, & elle conſerve la quantité dont elle la ſurpaſſe,

qui en eſt la différence, & qui garde encore le ſigne du retranchement ou de la ſouſtraction.

Suppoſons, par exemple, pour faire entendre ceci plus clairement, qu'on ait 7——7. Ces deux nombres ſe détruiront réciproquement, parce que la ſouſtraction détruit l'addition, comme cette Regle détruit la ſouſtraction. Dans 5——7, 5 détruit 5 unités de 7; enſorte qu'il ne reſte plus que deux unités à 7, mais deux unités de retranchement, ſçavoir ——2, comme il reſteroit deux unités d'addition à 7 ſi l'on avoit 7——5 qui eſt 2.

Voyez ce qui a été dit ſur le ſigne *moins* N°. 579.

Il ſuit de-là que le logarithme d'une fraction moindre qu'un nombre entier, comme par exemple, de $\frac{3}{4}$, eſt la quantité dont le logarithme du dénominateur 4 ſurpaſſe celui du numérateur 3, mais précedée du ſigne ——, c'eſt-à-dire 4771213 —— 6020600 qui ſe réduit, après avoir ôté le premier logarithme du ſecond, à ——1249387. Ces ſortes de logarithmes peuvent être appellés *négatifs*, parce que le ſigne qui les précede s'appelle auſſi *négatif*. Lorſqu'on en trouve de cette eſpece, c'eſt une marque qu'ils appartiennent à des fractions.

II.

1239. Si l'on veut trouver le logarithme d'une partie d'entier, comme de la livre ou de la toiſe, &c. exprimée en ſols, deniers, ou en pieds & pouces, &c. il faut réduire ou changer cette partie en fraction, & en trouver enſuite le logarithme comme celui d'une fraction.

TROISIE'ME PROBLEME.

1240. *Ayant un logarithme quelconque, trouver à quel nombre il appartient.*

Ce problême a pluſieurs cas ; car

1°. Ou le logarithme propoſé ſera trouvé exactement dans les Tables.

2°. Ou il n'y ſera pas contenu exactement.

3°. Ou il ſera précedé du ſigne——, c'eſt-à-dire, qu'il appartiendra à une fraction,

4°. Ou enfin il ſera plus grand que les logarithmes des Tables.

1241. Pour le premier cas : Si le logarithme propoſé ſe trouve exactement dans les Tables, le nombre auquel il appartient ſera à côté dans le même rang de la colomne qui le précede à gauche. Ainſi, ſi ce logarithme eſt, par exemple 36107666, le nombre 4081 qui ſe trouve à côté dans la colomne de la gauche, eſt celui auquel ce logarithme appartient.

1242. Pour le ſecond cas : Si le logarithme donné eſt, par exemple 39531250, qui ne ſe trouve pas dans les Tables des logarithmes, mais dont les mêmes Tables en contiennent de plus grands & de plus petits ; on cherchera les deux logarithmes 39530828 & 39531312 qui en approchent le plus, & entre leſquels le propoſé doit ſe trouver.

On ôtera le plus petit de ces trois logarithmes, c'eſt-à-dire 39530828, des deux autres ; ce qui donnera les deux reſtes 422 & 484 qu'on mettra en fraction $\frac{422}{484}$; on ajoutera cette fraction au nombre 8976 du moindre logarithme, & l'on aura ainſi $8976\frac{422}{484}$ pour le nombre approché du logarithme propoſé.

REMARQUES.

I.

1243. La fraction $\frac{422}{484}$ eſt le quatriéme terme d'une Regle de Trois, dont l'excès 484 du plus grand logarithme ſur le plus petit eſt le premier terme, l'u-

nité le ſecond, & le troiſiéme, l'excès du logarithme donné ſur le plus petit. Cette Regle eſt fondée ſur ce principe,

Que l'augmentation des nombres eſt proportionnelle à celle de leurs logarithmes.

Qu'ainſi, comme la difference ou l'excès du plus grand logarithme ſur le plus petit donne une unité d'augmentation au nombre de ce plus grand logarithme, de même l'excès du logarithme donné ſur le plus petit, eſt à la quantité dont il ſurpaſſe le nombre de ce petit logarithme.

Ce raiſonnement ou ce principe n'eſt pas tout à fait exact; mais il ne peut cauſer qu'une erreur inſenſible, lorſque le nombre du logarithme propoſé ſurpaſſe 1000; car comme on l'a déja obſervé *, dans les grands nombres les augmentations des logarithmes ſuivent aſſez exactement celles de ces nombres, ou ce qui eſt la même choſe, elles ſont ſenſiblement proportionnelles à l'augmentation des nombres.

* N°. 1226.

II.

1244. Lorſque le logarithme propoſé ſe trouve appartenir à un nombre au-deſſous de 1000, la méthode qu'on vient d'indiquer ne ſeroit pas ſuffiſamment exacte; mais dans ce cas on ajoute au logarithme propoſé celui d'un nombre aſſez grand pour que leur ſomme appartienne à un logarithme plus grand que 1000: Plus il ſera grand, & plus l'opération ſera exacte. On trouve enſuite le nombre de ce logarithme ainſi augmenté, comme on vient de l'enſeigner: Mais comme l'addition de deux logarithmes donne le logarithme du produit des nombres auſquels ils appartiennent, il s'enſuit que le nombre du logarithme donné ſe trouve dans cette opération

multiplié par le nombre du logarithme qu'on lui a ajouté, & qu'ainſi il faut diviſer le nombre trouvé par celui du logarithme qu'on a ajouté au propoſé. Un exemple éclaircira ce raiſonnement, qui n'eſt qu'une ſuite de ce qui a été établi ſur les proprietés des logarithmes.

Soit le logarithme donné 16076543, le nombre auquel il appartient eſt moindre que 41; car le logarithme de 41 eſt 16127839 qui eſt plus grand que le propoſé. On ajoutera au logarithme donné celui d'un nombre quelconque, qui multipliant 40, donne un produit au moins de 1000. Suppoſons qu'on ajoute à ce logarithme celui de 100 qui eſt 20000000, on aura 36076543 pour leur ſomme, qui ſera le logarithme d'un nombre cent fois plus grand que celui qui appartient au logarithme donné 16076543.

On cherchera, comme dans l'exemple précedent, le nombre auquel ce logarithme appartient. On trouvera 4051 $\frac{921}{1072}$ ou à peu près 4051 $\frac{61}{71}$; & comme ce nombre eſt cent fois trop grand, on le diviſera par cent, & l'on aura pour le nombre du logarithme donné 40 $\frac{51}{100}$ plus environ $\frac{61}{7100}$. Il en ſera de même de tous les autres cas ſemblables.

1245. Préſentement, *pour trouver le nombre ou la fraction qui appartient à un logarithme négatif*, ce qui eſt le troiſiéme cas du troiſiéme problême;

On ſe ſervira de la méthode du ſecond, c'eſt-à-dire, qu'on ajoutera à ce logarithme celui d'un nombre quelconque; leur ſomme donnera le logarithme du produit des nombres auſquels ils appartiennent *; c'eſt pourquoi ayant trouvé le nombre qui appartient à ce logarithme, on le diviſera par le nombre propoſé, le quotient donnera le nombre ou la fraction qui aura pour logarithme le propoſé négatif.

* N°. 1221.

EXEMPLE.

Logarithme de 10000 - - - 40000000
Logarithme négatif —— 02218487

Somme de ces Logarithmes - 37781513.

Soit donné le logarithme négatif —— 02218487. Pour trouver le nombre ou la fraction auquel il appartient, on lui ajoutera un logarithme quelconque, comme par exemple, celui de 10000 qui eſt 40000000; & comme le ſigne —— qui précede le logarithme donné, indique la ſouſtraction ou le retranchement, ce logarithme étant joint avec celui de 10000, en retranchera ſa valeur; enſorte que leur ſomme ne ſera que l'excès du logarithme de 10000 ſur le propoſé; cet excès ou difference eſt 37781513. On cherchera dans les Tables des logarithmes le nombre auquel il appartient. On trouvera 6000 : Mais comme ce nombre eſt 10000 fois plus grand que la fraction à laquelle le logarithme donné appartient, on le diviſera par 10000, & l'on aura ainſi $\frac{6000}{10000}$ ou $\frac{3}{5}$ pour le nombre ou la fraction qui a pour logarithme——02218487.

1246. Enfin pour le quatriéme cas du troiſiéme problême, qui conſiſte *à trouver le nombre d'un logarithme donné, plus grand que les logarithmes des Tables;*

Il faut du logarithme donné en retrancher celui d'un nombre quelconque pris de maniere que la difference ſoit le logarithme d'un nombre qui ſe trouve dans les Tables. Il eſt évident que le produit des nombres de ces deux logarithmes ſera le nombre qui appartient au propoſé *.

* Nº. 1221.

EXEMPLE.

Soit 45552830 le logarithme donné, qui surpasse le plus grand des Tables. On en retranchera, par exemple, le logarithme 10000000 du nombre 10, il restera 35552830. Le nombre qui appartient à ce logarithme est à peu près 3591 plus $\frac{676}{1209}$. Mais comme en ôtant du logarithme donné le logarithme de 10, le logarithme qui est resté appartient à un nombre dix fois plus petit que celui du proposé; il s'ensuit qu'en multipliant 3591 plus $\frac{676}{1209}$ par 10, on aura le nombre demandé, il sera 35915 plus $\frac{755}{1209}$.

Application des logarithmes aux differentes opérations dans lesquelles on les employe & qui en donnent l'usage.

Après tout ce qui a été expliqué jusqu'ici sur les logarithmes, il est évident

1247. 1°. *Que la multiplication des nombres par le moyen de leurs logarithmes*, se fait par l'addition de ces logarithmes.

Qu'ainsi pour multiplier deux nombres quelconques, dont le produit est moindre que 20000, comme par exemple, 144 par 23, il faut seulement ajouter ensemble leurs logarithmes, & que leur somme sera celui du produit des deux nombres donnés.

Logarith. de 144 - - -	215836.25
Logarith. de 23 - - -	136172.78
Somme de ces deux Logarith.	352009.03.

On cherchera dans les Tables le nombre qui ré-

pond à la ſomme des deux logarithmes, c'eſt-à-dire à 352009.03; on trouvera 3312; c'eſt le produit des deux nombres propoſés.

1248. 2°. *Que la diviſion d'un nombre par un autre, ſe fait en ôtant du logarithme du dividende celui du diviſeur, & que le reſte eſt le logarithme du quotient.*

Qu'ainſi pour diviſer un nombre quelconque, moindre que 20000, par un autre nombre, comme par exemple, 5964 par 14,

Il faut du logarithme 5964 qui eſt - - 377553.76,
ôter celui du 14 qui eſt - - - - - - - - 114612.80;

le reſte - - - - - - - - - - 262940.96

ſera le logarithme du quotient. Cherchant dans les Tables le nombre auquel ce logarithme appartient on trouvera 426. c'eſt le quotient de 5964 diviſé par 14.

1249. 3°. *Que pour extraire la racine quarrée d'un nombre moindre que* 20000, *il faut prendre la moitié du logarithme de ce nombre, & que cette moitié ſera le logarithme de ſa racine* *.

* N. 1222.

Ainſi pour extraire la racine quarrée de 1296 on cherchera le logarithme de ce nombre qui eſt
- - - - - - 311260.50;
ſa moitié - - - - 155630.25

ſera le logarithme de la racine quarrée de ce nombre. Cherchant donc dans les Tables le nombre qui lui répond, on trouvera 36: & en effet 36 multiplié par 36 donne le nombre propoſé 1296.

Si le nombre propoſé eſt plus grand que 20000, on ſe ſervira de la méthode du premier problême

pour trouver ſon logarithme, & ſa moitié donnera celui de la racine demandée.

Si l'on a, par exemple, 20857489 dont on veut extraire la racine quarrée, on cherchera ſon logarithme qu'on trouvera de 7;192620, dont la moitié 36596310 ſera le logarithme de la racine quarrée du nombre donné. On cherchera dans les Tables le nombre qui répond à ce logarithme; on trouvera 4567, c'eſt la racine demandée.

1250. 4°. *Que pour extraire la racine cube d'un nombre quelconque, moindre que* 20000, *il faut prendre le tiers de ſon logarithme, & que le nombre qui aura ce tiers pour logarithme ſera la racine cube demandée* *. * Nº. 1222.

Ainſi pour extraire, par exemple, la racine cube de 4096 on cherchera le logarithme de ce nombre,

qui eſt - - - - -	361235.99
On en prendra le tiers, qui eſt -	120412.00.

Cherchant le nombre qui a ce tiers pour logarithme, on trouvera 16; c'eſt la racine cube de 4096: En effet, 16×16×16=4096.

Pour trouver de même la racine d'un nombre plus grand que 20000, comme par exemple 9938375, on cherchera le logarithme de ce nombre, par la méthode du problême premier, N. 1278: on aura pour ce logarithme 69973154; on en prendra le tiers, qui eſt 23324385. On cherchera dans les Tables le nombre qui répond à ce logarithme. On trouvera 215; c'eſt la racine cube du propoſé 9938375.

1251. Enfin 5°. Comme les Regles de Trois ou de proportion ſe font en multipliant enſemble le ſecond & le troiſiéme terme, & diviſant le produit par le premier, elles ſe feront par les logarithmes en additionnant les logarithmes des ſecond & troiſiéme

termes, & retranchant de leur ſomme celui du premier.

Toutes ces opérations ne ſeront ſuſceptibles d'aucune difficulté à ceux qui auront bien conçu les principes des logarithmes. Ils trouveront de même une moyenne & une troiſiéme proportionnelle à deux nombres donnés, de même que deux moyennes proportionnelles entre deux nombres. Tout cela paroît trop aiſé pour en allonger davantage cet article.

REMARQUE.

Il eſt à propos d'obſerver que dans la plûpart des Tables des logarithmes, les deux derniers chiffres de la droite ſont ſéparés des autres par un point; & cela, parce que dans les calculs de la Géometrie les ſix premiers chiffres de chaque logarithme peuvent ſuffire, ſans qu'il en réſulte aucune erreur ſenſible. Il eſt aiſé de s'en convaincre en opérant avec les huit chiffres de chaque logarithme, & enſuite avec les ſix premiers à gauche. Dans les calculs qu'on fera dans la ſuite avec les logarithmes, on ne prendra que les chiffres de la gauche qui ſont ſéparés des deux de la droite par un point.

III.

De la Réſolution ou du calcul des Triangles.

1252. LA réſolution des triangles conſiſte en général dans la maniere de trouver par le calcul la valeur des côtés & des angles qui ſe trouvent déterminés par les trois choſes connues ou données dans les triangles.

Principes pour la réſolution des triangles rectangles.

1253. Comme ces triangles ont l'angle droit de connu, il ne faut plus que deux choſes pour les déterminer; ſçavoir un côté & un angle, ou bien deux côtés quelconques.

PREMIER PRINCIPE.

1254. *Si l'on prend pour rayon ou ſinus total l'un des côtés A C qui forment l'angle droit A d'un triangle rectangle B A C, l'autre côté B A ſera la tangente de l'angle oppoſé C, & l'hypoténuſe C B la ſecante.*

DEMONSTRATION.

Du point C pris pour centre, & de l'intervalle C A, décrivez l'arc A D, qui ſera la meſure de l'angle C*: conſiderez enſuite que B A étant par la ſuppoſition perpendiculaire au rayon A C, qui paſſe par l'extrémité de l'arc A D, & étant terminée par la ligne C B qui paſſe par l'autre extrémité du même arc, elle eſt la tangente de cet arc *, & que B C en eſt la ſecante *; Or cet arc eſt la meſure de l'angle C: Donc, &c. Pl. 2. Fig. 4. *N. 83. *N°. 1175. *N°. 1179.

Il eſt évident que ſi l'on prend pour rayon l'autre côté B A de l'angle droit B A C, le côté A C ſera la tangente de l'angle oppoſé B, & B C la ſecante. Fig. 5.

SECOND PRINCIPE.

1255. *Si dans un triangle rectangle A B C, on prend l'hypotenuſe A C pour rayon ou ſinus total, les deux autres côtés de ce triangle ſeront les ſinus des angles auſquels ils ſeront oppoſés.* Fig. 6.

DEMONSTRATION.

Prolongez CB indéfiniment vers D : Enſuite du point C pris pour centre, & de l'hypoténuſe CA, décrivez l'arc AD, terminé en D par le prolongement de CB : cet arc ſera la meſure de l'angle C; mais par le N. 1169, AB eſt le ſinus de cet arc: Donc, &c.

On verra de la même maniere en prolongeant AB vers E, & décrivant de A pris pour centre & de l'intervalle de AC, l'arc CE, que cet arc eſt la meſure de l'angle A, & que CB en eſt le ſinus.

PRINCIPES pour la réſolution des Triangles obliqu'angles.

PREMIER PRINCIPE.

1256. *Dans tout triangle, les ſinus des angles ſont proportionnels aux côtés qui leur ſont oppoſés.*

Pl. 21. Fig. 7. Soit le triangle acutangle ADB, il faut démontrer que le ſinus de l'angle A eſt au ſinus de l'angle B, comme le côté DB oppoſé à A, eſt à AD oppoſé à l'angle B; & que les ſinus de A & de D, ſont auſſi entr'eux comme DB eſt à AB.

DEMONSTRATION.

Soit circonſcrit un cercle au triangle ADB, ou ce qui eſt la même choſe, fait paſſer la circonférence d'un cercle par ſes trois angles : Du centre C ſoient tirées les perpendiculaires CH, CE, CK, ſur les côtés de ce triangle, elles les couperont en deux également ; & étant prolongées juſqu'à la circonférence du cercle, elles couperont de même les arcs * N°. 190. que ſoutiennent les côtés du triangle *.

Cette conſtruction étant faite, il faut conſiderer que l'angle A a pour meſure la moitié de l'arc BD, ſur lequel il s'appuye *, c'eſt-à-dire, l'arc DF; que DE eſt le ſinus de cet arc, & par conſéquent de l'angle A *. * N. 197. * N°. 1169.

Il faut conſiderer de même que l'angle B a pour meſure GD, qui eſt la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuye, & que AH en eſt le ſinus.

Enfin que l'arc BL, moitié de ALB, eſt la meſure de l'angle D, & que BK en eſt le ſinus.

D'où il ſuit, que les ſinus des trois angles du triangle ADB ſe trouvant ainſi la moitié des côtés oppoſés à ces angles, & les moitiés étant en même raiſon que leurs Touts *, il en réſulte que le ſinus de l'angle A, c'eſt-à-dire DE, eſt au côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus de B, qui eſt DH, eſt à ſon côté oppoſé AD; enfin comme le ſinus de D qui eſt BK, eſt à ſon côté oppoſé AB. C. q. f. d. * N°. 613.

SECOND PRINCIPE.

1257. *Dans tout triangle obtus-angle, les ſinus des angles aigus ſont à leurs côtés oppoſés, comme le ſinus du ſupplément de l'angle obtus, eſt au côté oppoſé à cet angle.*

Soit le triangle obtus-angle ABD, dont l'angle B eſt ſuppoſé obtus. On fera paſſer la circonférence d'un cercle par les trois angles de ce triangle. Le centre C de cette circonférence ſera hors le triangle: car l'angle B étant obtus aura pour meſure la moitié d'un arc AMD, plus grand que la demi-circonférence *. Pl. 21. Fig. 8. * N°. 221.

On tirera enſuite de C, ſur les côtés du triangle, les perpendiculaires CI, CG, & CE, qui les couperont en deux également, & qui étant prolongées,

couperont de même les arcs que ſoutiennent ces côtés. On tirera auſſi d'un point quelconque M, pris à volonté dans l'arc AMD, les cordes MA, MD.

Cette préparation étant faite, conſiderez que l'angle M eſt le ſupplément de l'angle obtus B, puiſqu'ils ont enſemble pour meſure la moitié de la circonférence entiere *; que AI, AG, BE, moitiés des côtés du triangle, ſont les ſinus des angles oppoſés D, M, & A; & que comme les moitiés ſont en même raiſon que leurs Touts, l'on a AI. AB :: BE. BD :: AG. AD. c'eſt-à-dire, que les ſinus des angles aigus A & D, ſont à leurs côtés oppoſés BD & BA, comme le ſinus AG du ſupplément de l'angle obtus B, c'eſt-à-dire de M, eſt au côté AB oppoſé à cet angle obtus. C. q. f. d.

* N. 253.

TROISIE'ME PRINCIPE.

1258. *Dans tout triangle ſcalene, la ſomme des deux côtés eſt à leur différence comme la tangente de la moitié du ſupplément de l'angle qu'ils font enſemble, eſt à la tangente de la moitié de la différence des deux autres angles.*

Pl. 21. Fig. 9. Soit le triangle ſcalene ACB: il faut démontrer que la ſomme de ſes deux côtés CA & CB, eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié du ſupplément de l'angle C eſt à la tangente de la moitié de la différence des angles oppoſés CAB & CBA.

PRE'PARATION.

Du ſommet C & de l'intervalle du plus petit côté CA, décrivez une circonférence de cercle, laquelle coupera CB en D : prolongez BC juſqu'à ce te circonférence en F; tirez AD & menez par B, BE parallele

tallele à DE : tirez auſſi FA, qui étant prolongée terminera BE en E.

Cela fait, conſidérez 1°. Que par la conſtruction, CF eſt égal à AC; qu'ainſi FB eſt la ſomme des deux côtés AC, CB; & DB leur différence.

2°. Que l'angle FAD, qui a ſon ſommet à la circonférence du cercle & qui s'appuye ſur le diametre FD, eſt droit * : D'où il ſuit que FA eſt la tangente de l'angle ADF *. * N°. 200. * N. 1170.

3°. Que les côtés CA & CD étant égaux, les angles CAD, CDA le ſont également *; & que comme ils valent deux droits avec ACD, ils ſont chacun la moitié du ſupplément de cet angle : Ainſi FA, qui eſt la tangente de CDA, eſt celle de la moitié du ſupplément de l'angle compris ACB. * N°. 130.

4°. Qu'à cauſe des paralleles DA & BE, l'angle extérieur CDA eſt égal à ſon oppoſé intérieur CBE, qui eſt ainſi la moitié du ſupplément de l'angle ACB. Or CBA eſt plus petit que CBE de l'angle ABE, qui eſt égal à BAD, parce qu'il lui eſt alterne * : Mais ce même angle eſt la quantité dont CAB ſurpaſſe CAD, c'eſt-à-dire, la moitié du ſupplément de C : Donc CAB eſt plus grand que CBA de deux fois l'angle ABE, ou de ſon égal DAB : Donc ABE eſt la moitié de la différence des deux angles CAB & CBA, oppoſés à C. * N°. 157.

5°. Les paralleles AD & EB donnant l'angle exterieur FAD égal à l'intérieur AEB, il s'enſuit que le premier étant droit, le ſecond l'eſt auſſi. C'eſt pourquoi ſi dans le triangle rectangle AEB, on prend EB pour rayon, AE ſera la tangente de l'angle oppoſé EBA, c'eſt-à-dire, de la moitié de la différence des angles de la baſe du triangle propoſé ACB; & comme FBE eſt égal à FDA, EF, qui

eſt la tangente de EBF, eſt auſſi la tangente de la moitié du ſupplément de C.

Tout cet expoſé étant bien conçu, il faut démontrer que FB, ſomme des deux côtés connus du triangle, eſt à leur différence DB, comme EF, tangente de la moitié du ſupplément de l'angle compris ACB, eſt à AE, tangente de la moitié de la différence des angles CAB & CBA oppoſés à C, ou que FB. DB :: EF. AE.

DEMONSTRATION.

Remarquez que AD étant parallele à EB par la conſtruction, coupe proportionnellement en A & en D, les deux côtés FE & FB du triangle EFB*, ce qui donne FD. DB :: FA. AE., & en compoſant, FD + DB. DB :: FA + AE. AE.* : Or FD + DB eſt égal à FB, & FA + AE à FE; c'eſt pourquoi mettant dans la proportion précédente les lignes FB & EF, à la place de FD + DB & de FA + AE, elle donnera FB. DB :: EF. AE. C. q. f. d.

* N°. 781.

* N°. 682

QUATRIE'ME PRINCIPE.

1259. *Dans tout triangle ſcalene, ſi l'on prend le plus grand côté pour baſe, la baſe ſera à la ſomme des deux autres côtés, comme la différence de ces côtés ſera à la différence des deux parties de la baſe coupée par la perpendiculaire tirée du ſommet du triangle.*

Pl. 21 Fig. 1. Soit le triangle ſcalene ACB, dont AB eſt le plus grand côté, & AC le plus petit. Du ſommet C, ſi l'on fait tomber la perpendiculaire CE ſur AB, qui partage cette ligne en deux parties inégales AE & EB, il faut démontrer que AB eſt à la ſomme des deux côtés CA & CB, comme la différence de ces côtés eſt à celle des deux parties de la baſe AE & EB.

PRE'PARATION.

Du ſommet C & de l'intervalle du plus petit côté CA, décrivez un cercle dont la circonférence coupera AB en F, & CB en D : Prolongez auſſi CB en G, & conſiderez que GC eſt égal à AC, parce qu'ils ſont rayons du même cercle ; qu'ainſi GB eſt la ſomme des deux côtés, & DB leur différence. Obſervez auſſi que la perpendiculaire CE tirée du centre C ſur AF, coupe cette corde en deux également *, enſorte que AE eſt égal à EF, ce qui donne FB pour la différence des deux parties AE & EB de la baſe AB : C'eſt pourquoi il reſte à démontrer que BA. BG :: BD. BF.

* Nº. 190.

DEMONSTRATION.

Conſiderez les lignes BA & BG comme étant tirées d'un point B hors la circonférence du cercle, & terminées en A & en G à ſa partie concave ; il s'enſuivra, ſuivant ce qu'on a démontré N. 799, que BA. BG :: BD. BF. C. q. f. d.

PROBLEMES.

Pour la réſolution des Triangles rectangles.

PREMIER PROBLEME.

1260. *L'hypotenuſe d'un triangle rectangle & un angle étant donnés, trouver les deux autres côtés.*

Soit le triangle rectangle CAB dont l'hypotenuſe CB eſt donnée, par exemple, de 50 toiſes, & l'angle C de 36 dégrés 52 minutes ; il faut trouver d'abord le côté AB. Pl. 21. Fig. 11

Conſiderez que CB étant pris pour ſinus total, AB eſt le ſinus de l'angle C *, qui lui eſt oppoſé. * Nº. 14

Or il eſt évident qu'il y a le même rapport entre CB & AB diviſées en parties de ſinus, ou diviſées en toiſes : C'eſt pourquoi pour trouver le nombre des toiſes de AB, on fera cette analogie.

Le ſinus total CB, qui vaut 100000 parties de ſinus, eſt au ſinus de C, ou de 36 dégrés 52 minutes (qu'on trouvera dans les Tables de 59995 parties) comme le côté CB en toiſes, qui eſt 50, eſt aux toiſes de AB, c'eſt-à-dire, que l'on a cette proportion :

160000. 59995 :: 50. AB.

59995
50

2999750 | 100000 } 29 toiſes.

099975 0
100000

09975 0 pieds.
6

59850 0 | 100000 } 5 pieds.

0985 00 pouces.
12

19700 0
9850 0.

118200 0 | 100000 } 11 pouces.

018200 0
100000

08200 0

Faiſant cette Regle à l'ordinaire, on aura pour ſon quatriéme terme, ou pour la valeur de A B, 29 toiſes, 5 pieds, 11 pouces.

Pour trouver le côté C A du même triangle, il faut déterminer la valeur de l'angle B; & pour cela de 90 dégrés, ſomme des deux aigus C & B, ôter la valeur de C, 36 dégrés 52 minutes : il reſtera pour B 53 dégrés 8 min.

90	d. —	0 m.
36	—	52
53	d. —	8 m.

Préſentement, prenant encore B C pour ſinus total, A C ſera le ſinus de l'angle B *, & l'on trouvera C A par cette analogie : * N°. 1255.

Le ſinus total eſt au ſinus de l'angle B, comme le côté C B en toiſes, eſt à C A auſſi en toiſes.

Cherchant dans les Tables le ſinus de 53 dégrés 8 minutes, on le trouvera de 80003 : C'eſt pourquoi l'analogie précédente donnera :

100000. 80003 :: 50. C A.

Faiſant cette Regle comme celle qui a été faite pour trouver A B, on aura 40 toiſes pour la valeur de C A.

SECOND PROBLEME.

1261. *Un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle & l'un de ſes angles aigus étant donnés, trouver l'hypotenuſe & le troiſiéme côté du même triangle.*

Soit le triangle rectangle D E F, dont le côté D E Pl. 21 Fig. 12 eſt donné de 54 toiſes, & l'angle oppoſé F de 38 dégrés 25 minutes.

Il faut 1°. Trouver ſon hypotenuſe D F ;

Et 2°. ſon côté E F.

Pour trouver le côté D F, il faut déterminer la

valeur de l'angle D, qui eſt le complement de F : C'eſt pourquoi ôtant de 90 dégrés la valeur de F, c'eſt-à-dire, 38 dégrés 25 minutes, il reſtera pour D, 51 dégrés 35 min.

$$\begin{array}{r} 90^{d.} - 0^{m.} \\ 38 - 25 \\ \hline 51^{d.} - 35^{m.} \end{array}$$

Préſentement, ſi l'on prend DE pour ſinus total, l'hypotenuſe DF ſera la ſecante de l'angle D, & le côté EF la tangente *; ce qui donnera cette analogie : *N. 1254.

Le ſinus total eſt à la ſecante de l'angle D, comme le côté connu DE eſt à l'hypotenuſe DF.

Cherchant dans les Tables la ſecante de 51 dégrés 35 minutes, on la trouvera de 160933 parties ; & comme le ſinus total contient 100000 des mêmes parties, l'analogie précédente donnera

100000. 160933 :: 54. DF.

Faiſant la Regle à l'ordinaire, comme dans le premier Problême, on trouvera 86 toiſes 5 pieds 5 pouces pour la valeur de l'hypotenuſe DF.

Préſentement, pour connoître EF, l'on aura cette analogie, en prenant toujours DE pour ſinus total :

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle D, comme DE en toiſes, eſt à EF auſſi en toiſes.

C'eſt-à-dire, en prenant la valeur du ſinus total & celles de la tangente de l'angle D, en parties de ſinus,

100000. 126093 :: 54. EF.

Faiſant cette Regle de proportion, on aura 68 toiſes 6 pouces, pour la valeur de EF.

TROISIE'ME PROBLEME.

1262. *L'hypotenuſe & un autre côté d'un triangle rectangle étant donnés, trouver les angles.*

Soit le triangle CAB, dont l'hypotenuſe CB eſt donnée, par exemple, de 75 toiſes, & le côté CA de 56 : il faut trouver les angles C & B. Pl. 22 Fig. 13

Conſiderez que ſi l'on prend BC pour ſinus total, CA eſt le ſinus de l'angle oppoſé B *; & que comme ces deux côtés ont le même rapport en toiſes qu'en parties de ſinus, ils donnent cette analogie : * N°. 1255.

CB eſt à CA, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle B : c'eſt-à-dire, en mettant à la place des trois premiers termes leurs valeurs.

75. 56 :: 100000. *x.* (en repréſentant par *x* le ſinus de B.)

Faiſant cette Regle de proportion, on aura 74666 pour le ſinus de B.

On cherchera dans les Tables le ſinus le plus approchant de ce nombre ; on trouvera 74663, qui répond à un angle de 48 dégrés 18 minutes : c'eſt la valeur de l'angle B.

L'angle B étant ainſi connu, il eſt évident qu'on aura la valeur de l'autre C, en ôtant B de 90 dégrés : on le trouvera de 41 dégrés 42 minutes.

$$\begin{array}{r} 90^{d.} \\ 48 \text{ —— } 18 \\ \hline 41^{d.} \text{——} 42^{m.} \end{array}$$

Si l'on avoit voulu trouver d'abord l'angle C, on auroit fait cette analogie :

CA eſt à CB, comme le ſinus total eſt à la ſecante de l'angle C.

Car il eſt clair qu'en prenant CA pour ſinus total, l'hypoténuſe CB eſt à la ſecante de l'angle C*. * N°. 1254.

REMARQUE.

1263. Les angles C & B du triangle CAB étant connus avec l'hypoténuſe CB & le côté CA, il eſt aiſé de trouver le côté AB par l'une ou l'autre de ces deux analogies :

La premiere, en prenant B C pour ſinus total ou rayon :

Le ſinus total eſt au ſinus de l'angle C de 41 degrés 42 minutes, comme C B en toiſes eſt à A B auſſi en toiſes :

Ou 100000. 66523 :: 75. A B.

La ſeconde, en prenant C A pour ſinus total :

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle C, comme C A eſt à A B :

Ou 100000. 89096 :: 56. A B.

Si l'on fait l'opération de chacune de ces analogies, elles donneront également 49 toiſes, 5 pieds, 4 pouces pour la valeur de A B.

II.

1264. Les deux côtés C B & C A du triangle rectangle C A B étant connus, il eſt évident que par la proprieté de ce triangle on peut connoître le côté A B ſans calcul trigonometrique.

Car comme le quarré de l'hypoténuſe C B eſt égal au quarré des deux autres côtés C A & A B*, il eſt clair qu'en ôtant du quarré de C B, celui de C A, il reſtera le quarré de A B, dont la racine 49 toiſes $\frac{88}{100}$ donnera la valeur du côté A B.

*N°. 794.

75		
75		
375		
525.		*Quarré de C B.*
5625		
3136		
2489	*quarré de A B.*	

56		
56		
336		
280.		*Quarré de C A.*
3136.		

$$\begin{array}{r|l} 24 & 89 \\ 16 & \\ \hline & \\ 889 & \\ 89 & \\ \hline & \\ 88.00 & \\ 988 & \\ \hline & \\ 896.00 & \\ 9968 & \\ \hline & \\ 9856. & \end{array} \quad \left\{ 49^{\text{toiſ.}}\ \frac{88}{100}. \right.$$

QUATRIE'ME PROBLEME.

1265. *Les deux côtés qui comprennent l'angle droit d'un triangle rectangle étant donnés, trouver les angles aigus de ce triangle.*

Soit le triangle rectangle B A C dont les deux côtés B A & A C qui forment l'angle droit B A C ſont connus, il faut trouver les angles B & C. Pl. 22. Fig. 2.

Prenant le côté B A pour ſinus total, A C ſera la tangente de l'angle B; c'eſt pourquoi le rapport de B A à A C eſt égal à celui du ſinus total à la tangente de B. Ce qui donne cette analogie.

B A . A C :: 100000 . x (en repréſentant par x la tangente de l'angle B).

Si l'on ſuppoſe B A de 38 toiſes, & A C de 29, l'analogie précedente deviendra 38. 29 :: 100000.x.

Faiſant la Regle de proportion on trouvera 76315 pour la tangente de B. On cherchera dans les Tables la tangente la plus approchante de cette valeur, on trouvera 76317, qui répond à un angle de 37 degrés 21 minutes; c'eſt la valeur de l'angle B. On trouvera l'autre C en ôtant B de 90 degrés.

REMARQUES.

I.

1266. Les angles du triangle A B C étant ainſi déterminés, il eſt aiſé de trouver ſon hypoténuſe par cette analogie, dans laquelle on prend B C pour ſinus total :

Comme le ſinus de l'angle B, eſt à ſon côté oppoſé A C, ainſi le ſinus total eſt à l'hypoténuſe B C.

Ou bien prenant B A pour ſinus total, & conſidérant que B C eſt dans cette ſuppoſition la ſecante de l'angle B, on aura cette ſeconde analogie :

Comme le ſinus total eſt à la ſecante de l'angle B, ainſi B A eſt à B C.

II.

1267. Il eſt aiſé de remarquer que B C peut être auſſi connue par la proprieté du triangle rectangle; car quarrant ſéparément chacun des côtés B A & A C, & joignant enſemble leurs quarrés, leur ſomme donnera celui de l'hypoténuſe *; c'eſt pourquoi ſi l'on en extrait la racine quarrée, on aura la valeur de cette ligne.

* N°. 794.

PROBLEMES.

Pour la réſolution des triangles acutangles & obtusangles.

PREMIER PROBLEME.

1268. *Deux angles & un côté étant donnés dans un triangle, trouver les autres côtés.*

Soit le triangle A C B dans lequel la baſe A B &

les angles A & B ſur cette baſe ſont donnés ; ſçavoir Pl. 22. Fig. 3
A B de 178 toiſes ; l'angle A de 36 degrés 40 minutes, & l'angle B de 56 degrés 25 minutes. Il faut trouver la valeur des deux autres côtés C A & C B du même triangle.

Pour cela, il faut conſidérer que ſuivant le principe du N. 1256, les ſinus des angles ſont proportionnels aux côtés oppoſés ; ce qui donne cette analogie, pour avoir, par exemple, le côté C B :

Le ſinus de l'angle C eſt à ſon côté oppoſé A B, comme le ſinus de A eſt au côté oppoſé C B.

Pour avoir l'angle C, il faut de 180 degrés retrancher la ſomme des deux angles A & B, qui eſt 93 degrés 5 minutes ; il reſtera pour C, 86 degrés 55 minutes.

Angle A - -	36 d.	40 m.
Angle B - -	56 .	25
Somme - -	93 d.	05 m.
Laquelle retranchée de - -	180	0
Il reſte pour C .	86 d.	55 m.

Prenant donc dans les Tables les ſinus des angles C & A, & mettant dans l'analogie précedente ces ſinus & la valeur du côté A B, elle deviendra

99855. 178 :: 59715. CB.

178

477720
418005.
59715..

106292270 } 106 toises 2 pieds 8 pouces.
99055 | |

064377 0
99855

44640
6

267840 } 2 pieds;
99855

69130
12

138260
69130.

829560 } 8 pouces;
99855

Reſte 30720.

Faiſant la Regle à l'ordinaire, on trouvera 106 toiſes, 2 pieds 8 pouces pour le côté C B.

On trouvera le côté A C de la même maniere.

REMARQUE.

Pl. 22. Fig. 4. 1269. Si le triangle propoſé eſt obtusangle, comme D E F, dans lequel l'angle F eſt de 113 degrés

45 minutes, on cherchera d'abord, comme dans l'exemple précedent, la valeur de E.

Pour cela, on additionnera enſemble D & F ſuppoſant D de 38 degrés, leur ſomme ſera 151 degrés 45 minutes, laquelle étant ſouſtraite de 180 degrés, il reſtera 28 degrés 15 minutes pour l'angle E.

Angle D - -	38 degrés.	
Angle F - -	113 —	45m.
Somme de D & F	151d. —	45m.
De - - - -	180 degrés.	
Otant D & F de-	151 —	45m.
Il reſte pour E -	28d. —	15m.

Cela fait, pour trouver le côté D E oppoſé à l'angle obtus E, on fera cette analogie :

Le ſinus de l'angle E eſt à ſon côté oppoſé D F (qu'on ſuppoſe de 100 toiſes) *comme le ſinus du ſupplément de F, eſt au côté D E oppoſé à F.*

Cette analogie eſt fondée ſur ce que ſuivant le principe du N. 1257, les ſinus des angles aigus des triangles obtusangles ſont à leurs côtés oppoſés, comme le ſinus du ſupplément de l'angle obtus eſt au côté oppoſé à cet angle. Cherchant donc dans les Tables le ſinus de l'angle E, & du ſupplément de 113 degrés 45 minutes, c'eſt-à-dire, de 66 degrés 15 minutes, & mettant ces ſinus & la valeur du côté D F dans l'analogie précedente, elle deviendra

180d.	
113 —	45m.
66 —	15.

47331. 91531 :: 100. DE.

Faiſant la Regle à l'ordinaire, on trouvera 193 toiſes 2 pieds 3 pouces pour le côté D E.

Il eſt évident que ſi les deux angles donnés D & F n'étoient pas ſur le même côté D F, que le problême ſe réſolvetoit de la même maniere; car les angles de tout triangle étant égaux à deux droits, ôtant de 180 degrés les deux angles donnés, on aura toujours la valeur du ſecond angle fait ſur le côté donné.

SECOND PROBLEME.

1270. *Deux côtés d'un triangle & un angle, oppoſé à l'un de ces côtés, étant donnés, trouver les deux angles & le troiſiéme côté.*

Pl. 22. Fig. 5. Soit le triangle A C B dans lequel les deux côtés A C & C B ſont donnés; ſçavoir, le premier de 54 toiſes, & le ſecond de 46 : Soit auſſi l'angle donné A oppoſé au côté C B de 35 degrés 12 minutes. Il faut d'abord trouver l'angle B.

Pour cet effet, conſiderez que par le principe du N. 1256, on a cette analogie :

Le côté C B eſt au ſinus de l'angle A qui lui eſt oppoſé, comme A C eſt au ſinus de l'angle B :

Ou 46 toiſes. 57643 (ſinus de 35 degrés 12 m.) :: 54. *x*. (*x* exprime le ſinus de B).

Faiſant cette Regle à l'ordinaire, on trouvera pour le ſinus de B, 67667.

On cherchera dans les Tables des ſinus, le ſinus le plus approchant de ce nombre. On trouvera 67666 qui répond à un angle de 42 degrés 35 minutes; c'eſt la valeur de l'angle B.

L'angle B étant ainſi trouvé, on le joindra à l'angle A, & l'on ôtera leur ſomme de 180 degrés; le reſte donnera l'angle C, lequel étant connu, il ſera aiſé de trouver par le premier Problême N. 1268. le côté A B qui lui eſt oppoſé.

TROISIE'ME PROBLEME.

1271. *Deux côtés d'un triangle étant donnés, & l'angle qu'ils font enſemble, trouver les deux autres angles & le troiſiéme côté.*

Soit le triangle ACB, dans lequel l'angle C eſt donné, par exemple, de 75 dégres, le côté AC de 48 toiſes, & CB de 59 : il s'agit d'abord de trouver les angles A & B. Pl. 22. Fig. 6.

Pour cela il faut conſiderer que le troiſiéme principe, N. 1258, donne cette analogie :

La ſomme des deux côtés CA & CB eſt à leur difference,

Comme la tangente de la moitié du ſupplément de C,

Eſt à la tangente de la moitié de la différence des angles A & B.

La ſomme de AC & de CB eſt de 107 toiſes;

Leur différence eſt 11 toiſes.

Le ſupplément de 75 dégrés eſt 105, dont la moitié eſt 52 dégrés 30 minutes.

La tangente de cette moitié eſt, ſelon les Tables, de 164267.

180	
75	
105	
52 d.	30 m.

Mettant ces différens nombres dans l'analogie précédente, elle donnera

107. 11 :: 164267. *x.* (*x.* repréſente la tangente de la moitié de la différence des angles A & B.)

Faiſant cette Regle de proportion, on trouvera 17279 pour la valeur de la tangente de la moitié de la différence des angles A & B. On cherchera dans les Tables la tangente, la plus approchante de cette valeur; on trouvera que c'eſt celle qui eſt exprimée

par 17273 qui répond à un angle de 9 dégrés 48 minutes : cet angle eſt la moitié de la différence des angles A & B.

Préſentement il faut conſiderer que ſi les angles A & B étoient égaux, ils ſeroient chacun de 52 dégrés 30 minutes ; mais comme ils different du double de 9 dégrés 48 minutes, il faut, pour avoir le plus grand, ajouter à 52 dégrés 30 minutes, moitié du ſupplément de l'angle compris C, cette moitié de différence, & l'en retrancher pour le plus petit, enſorte que A, qui eſt le plus grand angle, étant oppoſé au plus grand côté, ſera de 62 dégrés 18 minutes, & B de 42 dégrés 42 minutes.

	52 d.	30 m.
	9	48
	62	18

De	52 d.	30 m.
ôter	9	48
reſte	42 d.	42 m.

Les angles A & B étant ainſi connus, on trouvera le côté AB par le ſecond Problême, N. 1270, en faiſant cette analogie :

Le ſinus de l'angle B, eſt à ſon côté oppoſé AC, comme le ſinus de C eſt à AB.

QUATRIE'ME PROBLEME.

1272. *Les trois côtés d'un triangle étant connus, trouver ſes angles.*

Pl. 22. Fig. 7. Soit le triangle ſcalene ABC, dans lequel les trois côtés ſont connus ; ſçavoir, AB de 48 toiſes, BC de 72, & la baſe AC de 90 : il s'agit de trouver ſes angles.

Le principe 4 du N. 1259, donne cette analogie :

Le plus grand côté AC,

Eſt à la ſomme des deux côtés BA & BC, comme la

différence de ces deux côtés eſt à la différence des deux parties de AC, coupée par la perpendiculaire tirée du ſommet B ſur la baſe AC.

Les trois premiers termes de cette analogie ou proportion ſont connus.

Car AC eſt de 90 toiſes, AB & BC de 120, & la différence de BC à AB eſt de 24 toiſes ; c'eſt pourquoi l'analogie précédente ſe réduit à celle-ci :

90. 120 :: 24. *x*. (*x* repréſente la différence de AD & DC.)

Si l'on fait cette Regle de proportion, on trouvera 32 toiſes pour la différence de AD & de DC.

Otant cette différence de AC, 90 toiſes, il reſtera 58 toiſes, dont la moitié 29 ſera la plus petite partie de la baſe AC : la plus grande ſera cette moitié augmentée de la différence 32 ; ainſi elle aura 61 toiſes.

Pour ſçavoir préſentement quelle eſt la plus grande partie de AD & de DC, il faut conſiderer que l'oblique BC étant plus grande, par la ſuppoſition que AB, elle a ſon éloignement du perpendicule DC plus grand que AD, qui eſt celui de l'oblique AB : D'où l'on voit que DC eſt de 61 toiſes, & AD de 29.

Le triangle ABC ſe trouvant ainſi partagé en deux triangles rectangles ADB, BDC, dans chacun deſquels on connoît deux côtés, on en trouvera les angles par le troiſiéme Problême de la réſolution des triangles rectangles, N. 1262.

Par exemple, pour trouver l'angle C, on prendra DC pour ſinus total, & alors CB ſera la ſecante de C ; ce qui donnera cette analogie :

DC eſt à BC, comme le ſinus total eſt à la ſecante de l'angle C :

Ou 61. 72 :: 100000. x. (x repréſente la ſecante de C.)

Faiſant l'opération, on aura 118032. pour cette ſecante : celle qui en approche le plus, dans les Tables, eſt 118025, qui répond à un angle de 32 dégrés 5 minutes; l'angle C eſt par conſéquent de cette valeur.

On trouvera l'angle A par une ſemblable analogie; & ôtant enſuite de 180 dégrés la ſomme de A & de C, le reſte ſera la valeur de l'angle B : ce qui eſt évident.

RESOLUTION

Du même Problême par les Logarithmes.

Pl. 22. Fig. 7. Le principe du N. 1259 donne cette analogie : 90. 120 :: 24. x. (x repréſente la différence des deux parties AD & DC de la baſe AC.)

Pour trouver x, il faut ajouter enſemble les logarithmes de 120 & de 24, & retrancher de leur * N°. 1251. ſomme celui de 90; ce reſte ſera le logarithme de x*.

Logarithme de 120	207918
Logarithme de 24	138021
Somme de ces logarithmes . .	345939
De laquelle ôtant celui de 90 . .	195424
Il reſte pour le logarithme de x . .	150515

On aura pour ce logarithme 150515, qui répond au nombre 32 : Ainſi ce nombre eſt la différence des deux parties de AC, comme on l'a déja trouvé dans la Réſolution précédente.

Otant de AC (90 toiſes) la différence 32, &

prenant la moitié du reſte 58, qui eſt 29, on aura, comme on l'a déja vû, AD de 29 toiſes, & DC de 61.

Maintenant pour trouver l'angle C, il faut obſerver que les Tables des Logarithmes ne contenant point ceux des Secantes, on ne peut, comme dans la réſolution précédente, prendre DC pour ſinus total, afin d'avoir BC pour la ſecante de l'angle cherché; il faut au contraire prendre BC pour ſinus total & remarquer que dans cette ſuppoſition DC ſera le ſinus de l'angle DBC, lequel étant connu, fera trouver C, parce qu'ils ſont complement l'un à l'autre ou qu'ils valent enſemble 90° dégrés.

On fera donc ainſi cette nouvelle analogie :

BC eſt à DC, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle DBC; ou en repréſentant ce ſinus par *S*, & ſubſtituant aux trois premiers termes leurs valeurs :

72. 61 :: 100000. *S.*

A la place des nombres de cette proportion, on mettra leurs logarithmes, & l'on aura,

185733. 178532 :: 1000000. *x.* (*x* repréſente le logarithme du ſinus de DBC.)

On ajoutera enſuite les deux termes moyens, c'eſt-à-dire, les logarithmes de 61 & de 100000; & ôtant de leur ſomme le logarithme de 72, il reſtera 992799 pour le logarithme du quatriéme terme de la proportion *, ou du ſinus de l'angle DBC. * N°. 1251.

Logarithme de 61	178532
Logarithme de 100000	1000000
Somme de ces deux logarithmes .	1178532
De laquelle ôtant celui de 72 qui eſt .	185733
Il reſte pour celui du ſinus cherché . .	992799

On cherchera dans les Tables des Logarithmes, des Sinus & Tangentes, le ſinus logarithme le plus approchant de 992799 ; on trouvera 992802 (*a*), qui répond à un angle de 57 dégrés 55 minutes : c'eſt la valeur de DBC, laquelle étant ſouſtraite de 90 dégrés, donne 32 dégrés 5 minutes pour l'angle C, c'eſt-à-dire, la même valeur trouvée par le calcul des ſinus de la précédente Réſolution.

$$\left\{\begin{array}{l} 90^{d.} \\ 57 \text{ —— } 55^{m.} \\ \hline 32^{d.} \text{ —— } 5^{m.} \end{array}\right.$$

On trouvera de la même maniere l'angle ABD ; on l'ajoutera à DBC, ce qui donnera l'angle total ABC, auquel C étant ajouté & la ſomme de ces deux angles ſouſtraite enſuite de 180 dégrés, le reſte donnera le troiſiéme angle A : ce qui eſt évident.

IV.

DU NIVELLEMENT.

1273. LE *Nivellement* eſt une partie de la Géométrie-Pratique, par laquelle on détermine les diſtances de différens points de la ſurface de la Terre à ſon centre ; ce qui ſert principalement dans l'Architecture civile & militaire pour la conduite des Eaux.

1274. On dit que deux points d'une ligne ou

(*a*) Lorſqu'on a un logarithme qui ne ſe trouve pas exactement dans les Tables des Sinus des logarithmes, & qu'il s'en trouve un ſuperieur ou plus grand & un autre plus petit, qui en different à peu près également, il faut prendre le ſuperieur, comme on l'a fait dans cet exemple, à cauſe des reſtes qui ont été négligés dans la conſtruction des Tables des Logarithmes.

d'une ſurface *ſont de niveau*, lorſqu'ils ſont à égale diſtance du centre de la terre.

1275. Les lignes de niveau ſont des lignes horiſontales, tangentes à la terre ou perpendiculaires à ſon rayon. C'eſt pourquoi lorſqu'elles ſont fort longues, elles s'éloignent de ſa ſurface de la même maniere qu'une tangente s'éloigne d'autant plus de la circonférence du cercle qu'elle touche, qu'elle eſt prolongée au-delà du point touchant.

Soit, par exemple, le cercle X, qu'on ſuppoſe repréſenter un grand cercle de la terre. Si par le point A de ſa circonférence on tire une ligne droite AB, qui faſſe un angle droit avec le rayon AC, cette ligne ſera tangente à la terre *, c'eſt-à-dire, qu'elle ne la touchera que dans un point; ſi l'on tire de C en B la ſecante CB, elle ſera plus grande que AC, & par conſéquent les points A & B ſeront inégalement éloignés du centre de la terre: Donc ils ne ſeront point de niveau, mais ſeulement les points A & D, qui touchent la circonférence du cercle X. Pl. 21. Fig 8. * N°. 175.

1276. Il eſt évident que plus la tangente AB eſt grande, & plus l'excès DB de la ſecante ſur le rayon CA ou CD eſt grand; & qu'au contraire plus elle eſt petite, & plus cet excès diminue, enſorte que ſi elle n'eſt que de 100 ou 200 toiſes, comme la courbure de la terre eſt inſenſible dans une auſſi petite diſtance, l'excès DB le ſera auſſi, & alors tous les points de la ligne AB pourront être conſiderés comme également diſtans du centre de la terre & par conſéquent dans un parfait niveau.

1277. D'où il ſuit que les lignes de niveau n'ont tous leurs points de niveau que lorſqu'elles ne paſſent pas 200 toiſes. Lorſqu'elles ont plus d'étendue, on dit que leurs points ſont dans le *niveau apparent*, & on les appelle lignes *de niveau apparent*, parce

qu'elles paroiſſent avoir toujours toutes leurs parties de niveau.

1278. L'excès D B de la ſecante C B ſur le rayon C D, eſt appellé *la différence du niveau apparent au véritable.*

1279. Si l'on veut trouver deux points A & D dans le véritable niveau, il eſt évident qu'il faut connoître la difference D B du niveau apparent B au véritable D.

Pl. 22. Fig. 8. Pour cela, il faut conſiderer que le triangle C A B étant rectangle en A, la ſecante C B en eſt l'hypoténuſe, & que ſi l'on connoît le rayon de la terre A C & la tangente A B, qui eſt la ligne du niveau apparent, la ſomme des quarrés de ces deux lignes donnera le quarré de C B *, & par conſéquent la racine quarrée de cette ſomme le côté C B; duquel ôtant le rayon C D, il reſtera D B.

* N°. 794.

1280. M. *Picard* ayant déterminé le degré du meridien ou d'un grand cercle qui tourne autour de la terre, & qui paſſe par ſes poles, de 57060 toiſes, on a, en multipliant ce degré par 360, ſa circonference de 20,541,600 toiſes. Ce qui donne (en ſuppoſant que la circonference du cercle eſt à ſon diametre, comme 355 eſt à 113, ainſi qu'Adrien Metius la trouvé *) 6,538,594 toiſes pour ſon diametre, & pour ſon rayon la moitié 3,269,297.

* N°. 445.

Suppoſant à préſent que la ligne A B du niveau apparent ſoit de 300 toiſes;

On réduira A C & A B en pouces, ou plûtôt en lignes, afin que l'opération ſoit plus exacte.

On les élévera enſuite au quarré, & l'on prendra la racine quarrée de leur ſomme, qui donnera la ſecante C B, de laquelle ôtant le rayon C D, il reſtera le nombre de lignes que contient D B, c'eſt-à-dire, la difference du niveau apparent au vérita-

ble ſur une diſtance de 300 toiſes. On trouvera environ douze lignes ou un pouce.

1281. La difference D B du niveau apparent au véritable peut être encore déterminée d'une autre maniere.

Il faut conſiderer que la ligne de niveau apparent A B étant tangente en A à la circonference de X, elle eſt moyenne proportionnelle entre la ſecante E B, & ſa partie hors le cercle D B *, qui eſt la difference du niveau apparent au véritable ; que cette partie ſera toujours très-petite par rapport au diametre de la terre, parce que les nivellemens ne ſe font pas ordinairement dans des diſtances fort étendues, & que d'ailleurs quand l'arc A D ſeroit d'un demi-degré, qui répond environ à douze lieues, le rayon C A qui dans cette ſuppoſition ſeroit oppoſé à l'angle B de 89 degrés 30 minutes, ne differeroit guéres de la ſecante C B oppoſé à l'angle droit A, parce que les inclinaiſons de C A & C B ſeroient ſenſiblement égales : Et en effet, on peut voir dans les Tables des ſinus que la ſecante de 30 minutes ou d'un demi-degré ne differe guéres du rayon ou ſinus total.

* N°. 811.

D'où il ſuit,

1282. 1°. Que l'on peut, ſans erreur ſenſible, prendre le diametre de la terre pour la ſecante E D, & qu'ainſi on déterminera B D, dans cette ſuppoſition, en diviſant le quarré de A B par le diametre E D ; car on a vû N. 673. que pour trouver une troiſiéme proportionnelle à deux quantités données, il faut diviſer le quarré de la ſeconde par la premiere :

Ainſi $\frac{\overline{AB}^2}{ED} = DB$

1283. 2°. *Que les differences D B & G F du niveau apparent au véritable, ſont entr'elles comme les*

quarrés des distances A B & A F, ou des lignes du niveau apparent.

Pl. 11. Fig. 8. Car puisque l'on a ces differences en divisant le quarré des lignes de niveau apparent par la même quantité, c'est-à-dire, par le diametre de la terre ; il est évident que les quotiens de ces divisions sont entr'eux comme les dividendes *, c'est-à-dire, comme les quarrés des distances A B & A F : Donc, &c.

* N°. 624.

1284. Ce principe donne un moyen plus aisé que le premier pour trouver les differences du niveau apparent au véritable.

Car si l'on suppose, par exemple, que cette difference soit d'un pouce neuf lignes sur une distance de 400 toises, & qu'on veuille sçavoir qu'elle est sa quantité sur une distance de 800 toises, on la trouvera par cette Regle de proportion :

Comme le quarré de 400, *qui est* 160000,
Est à celui de 800, *qui est* 640000 :
Ainsi un pouce 9 *lignes*
Est à la difference demandée.

Faisant la Regle, on trouvera 7 pouces pour cette difference.

Et en effet, comme le quarré de 400 est le quart de celui de 800, de même un pouce 9 lignes est le quart de 7 pouces.

On peut donc par le moyen de ce principe se faire une Table pour trouver les differences du niveau apparent au véritable, relativement à la longueur des lignes de niveau apparent. M. *Picard* a donné celle que l'on joint ici.

TABLE pour les hauteurs du Niveau apparent au-dessus du véritable, depuis 50 toises jusqu'à 4000.

DISTANCES.	HAUTEURS.		
Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
50	0	0	$0\frac{1}{3}$
100	0	0	$1\frac{1}{3}$
200	0	0	5
300	0	0	$11\frac{2}{3}$
400	0	1	9
500	0	2	9
600	0	3	11
700	0	5	$4\frac{1}{3}$
800	0	6	$11\frac{1}{3}$
900	0	8	$9\frac{1}{3}$
1000	0	11	0
1500	2	0	9
2000	3	8	0
2500	5	8	$8\frac{1}{2}$
3000	8	3	0
4000	14	8	0

1285. Il suit de tout ce que l'on a dit jusqu'ici sur le nivellement, que pour trouver deux points de niveau, il faut connoître la difference du niveau apparent sur le véritable, relativement à la distance de ces points; mais comme cette difference ne peut se trouver que par le moyens des lignes de niveau apparent, qui sont tangentes à la terre; il faut pour niveler avoir des instrumens qui donnent des tangen-

tes, ou ce qui eſt la même choſe, des perpendiculaires au rayon de la terre. C'eſt le principe eſſentiel pour la conſtruction des *Niveaux* ou des inſtrumens propres à niveler.

On va donner un précis des uſages du plus commun, qui eſt le niveau d'eau.

Du Niveau d'eau.

Pl. 12. Fig. 9. 1286. Le niveau d'eau A eſt compoſé d'un tuyau rond de cuivre ou de fer blanc d'environ trois ou quatre pieds de longueur ſur 12 ou 15 lignes de diametre.

Il eſt recourbé à angles droits aux deux extrémités, afin de recevoir deux tuyaux ou bouteilles de verre B & C, de 3 ou 4 pouces de hauteur, qu'on y fait tenir avec de la cire ou du maſtic. Ces bouteilles n'ont point de fond, de maniere que ſi l'on verſe de l'eau dans la bouteille B, elle ſe communique à l'autre bouteille C par le tuyau A.

Pour ſe ſervir de cet inſtrument, on le poſe ſur un pied P, ſemblable à celui du Graphometre, & on le met dans une ſituation horiſontale, ou à peu près horiſontale. L'eau verſée dans le tuyau A, en aſſez grande quantité pour monter environ au deux tiers des deux bouteilles B & C, ſe met de niveau dans ces bouteilles; enſorte que ſa ſurface extérieure, dans chacune d'elle, eſt également diſtante du centre de la terre, & cela, ſoit que le tuyau A ſoit parallele ou incliné à l'horiſon.

Pour le prouver, il faut conſiderer que l'eau tendant au centre de la terre comme tous les autres corps peſants; ſi elle étoit plus éloignée de ce centre dans une bouteille que dans l'autre, elle ſeroit capable de la faire monter par ſon effort dans l'autre bouteille, juſqu'à ce que l'eau de cette ſeconde bou-

teille ſe trouvât en état de réſiſter à l'effort de la premiere, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce qu'elle ſoit autant diſtante du centre de la terre, ou que ſa partie ſupérieure ſoit de niveau avec celle de la premiere bouteille.

Uſages du Niveau d'eau.

1287. Lorſqu'on veut trouver par le nivellement la difference de l'élévation de deux points déterminés, comme A & B; ces points ſont appellés *termes*. Pl. 22. Fig. 10

Le premier terme eſt celui où on poſe le niveau, & le ſecond, celui ſur lequel ſe termine la ligne du niveau apparent, ou le rayon viſuel qui paſſe par la ſuperficie de l'eau du niveau.

Pour faire l'opération du nivellement, il faut avoir trois hommes avec ſoi pour en aider l'exécution. On les appelle communément *aides*. L'un doit être muni d'une longue perche ou double toiſe pour terminer le rayon viſuel que donne le coup de niveau. Il doit avoir auſſi un carton X d'environ 6 ou 8 pouces en quarré, partagé en deux également par une ligne parallele à un de ſes côtés. La moitié de ce carton eſt noircie, & l'autre eſt blanche, afin qu'en le faiſant couler ſur la perche oppoſée au niveau, l'Obſervateur puiſſe remarquer plus diſtinctement le point ou le rayon viſuel touche le carton. On le fait répondre pour cela à la ligne du milieu, qui ſépare la partie blanche de la noire. Fig. 11.

L'Obſervateur ayant mis de l'eau dans le niveau, enſorte qu'elle ſe trouve environ aux deux tiers de chacune des bouteilles, il poſe ſon niveau en F, éloigné du point A de la moitié de la longueur du niveau, afin que la bouteille C réponde exactement au point A. Fig. 10.

Le niveau étant ainſi placé dans une ſituation à peu prés horiſontale, l'Obſervateur enverra au point B deux Aides, qui porteront la double toiſe & le carton noirci. On ſuppoſe que ces points ne ſont éloignés que de 100 ou 120 toiſes, parce que le niveau d'eau ne peut donner des coups de niveau à une plus grande diſtance.

Ils poſeront ſur ce point la double toiſe le plus perpendiculairement qu'ils le pourront. On ſera convenu avec eux des ſignaux pour leur faire élever ou baiſſer le carton, qui s'applique ſur la double toiſe, juſqu'à ce que la ligne qui le diviſe en deux parties, ſoit dans le niveau apparent de la ſurface de l'eau des deux bouteilles.

Tout ceci étant bien entendu, celui qui fait le nivellement, & que nous appellons ici l'Obſervateur, mettra le niveau, ou ſes deux parties recourbées C & D, dans l'alignement de la double toiſe B G. Il regardera enſuite par la partie ſupérieure de l'eau des deux bouteilles du niveau, le point de la toiſe B G qui répond au prolongement de cette partie ſupérieure, & ſi la ligne de mire du carton (c'eſt-à-dire celle qui le ſépare en deux parties) ne ſe trouve pas à ce point, il le fera hauſſer ou baiſſer juſqu'à ce qu'elle ſe trouve répondre exactement à ce point, qu'on ſuppoſe être le point E.

Le point E étant ainſi trouvé, l'Obſervateur le fera connoître aux aides qui ſont en B : Alors l'un d'eux tiendra le carton fixement dans ce point, & l'autre meſurera la hauteur B E. On ſuppoſe qu'elle ſe trouve de ſix piés 9 pouces.

Le troiſiéme Aide qui accompagne toujours l'Obſervateur meſurera auſſi la hauteur C A, qu'on ſuppoſe de quatre pieds ſept pouces. Et les Aides envoyés en B étant venus rendre compte de la meſure

de BE, on ôtera de cette hauteur la ligne CA; il reſtera deux pieds deux pouces pour la difference ou l'excès du point A ſur le point B.

Ponr le démontrer, il faut obſerver que les ſurfaces de l'eau des deux bouteilles de l'inſtrument, étant de niveau, c'eſt-à-dire, également diſtantes du centre de la terre, peuvent, à cauſe de leur proximité, être conſiderées comme touchant la ſurface de la terre dans un ſeul point: Or la ligne CE de niveau apparent eſt le prolongement de la petite ligne qui paſſe par la ſurface des deux bouteilles: Donc elle eſt tangente à la terre; mais à cauſe de ſon peu d'étendue, on peut la regarder comme une partie de la circonference du grand cercle qui paſſe par C. Si par le terme A on imagine AH parallele à CE, les deux lignes AC & HE, qu'on peut conſiderer comme paralleles (parce qu'elles ſont perpendiculaires à deux points de la ſurface de la terre trop proches les uns des autres pour que leur tendance au centre faſſe une inclinaiſon ſenſible) ſont égales, étant terminées par les paralleles CE & AH: Ainſi A & H ſont également diſtans du centre de la terre; mais B eſt plus proche de ce centre que H, de la quantité HB de deux pieds deux pouces: Donc A eſt plus élevé que B de cette quantité. C. q. f. d.

REMARQUES.

I.

1288. Les opérations qu'on fait ainſi par un ſeul coup de niveau, ſont appellées *des nivellemens ſimples*; on appelle *nivellemens compoſés* ceux dans leſquels les termes ſe trouvent trop éloignés pour que le niveau puiſſe porter de l'un à l'autre, & dans leſquels on eſt obligé de faire pluſieurs opérations pour

connoître la difference ou l'égalité de leur niveau.

II.

1289. Dans les niveſlemens ſimples, faits avec le niveau d'eau, on n'a point d'égard à la difference du niveau apparent au véritable, parce que les coups de ce niveau ne s'étendent guéres au-delà de 100 ou 120, & que cette difference eſt inſenſible dans une auſſi petite diſtance, comme on le voit dans la Table de M. Picard. Mais dans les nivellemens compoſés, il faut y avoir d'autant plus d'attention que les termes du nivellement ſont plus éloignés l'un de l'autre.

Du Nivellement moyen.

1290. On peut dans pluſieurs occaſions augmenter la portée des coups du niveau d'eau, & même la doubler en ſe mettant avec le niveau à peu près au milieu de la diſtance des deux termes du nivellement. Cette façon de niveller s'appelle *nivellement moyen.*

EXEMPLE.

Pl.23. Fig.1. 1291. Soient les points A & B, dont on veut ſçavoir la difference ou l'égalité de leur niveau, éloignés d'environ 200 ou 250 toiſes.

L'Obſervateur ſe mettra avec le niveau à peu près dans le milieu de cette diſtance en C, & dans l'alignement des points A & B.

Il enverra deux Aides en A & en B, leſquels ſeront munis d'une double toiſe, & d'un carton noirci comme dans l'exemple précedent.

Ces Aides poſeront les perches en A & en B le plus perpendiculairement qu'ils le pourront. Et enſuite l'obſervateur ſe mettant du côté de I, regardera par-deſſus la ſurface de l'eau des deux bouteilles vers

la perche AD, & il fera hauſſer ou baiſſer le carton juſqu'à ce que la ligne qui ſépare la partie blanche de la noire ſe trouve dans l'alignement du rayon viſuel en F. Ce point étant trouvé, l'un des Aides tiendra le carton dans la même ſituation, & l'autre meſurera la hauteur AF. L'Obſervateur ſe placera après cela du côté de H, & regardant par-deſſus la ſurface des deux bouteilles du niveau la perche BE, il fera hauſſer ou baiſſer le carton juſqu'à que ſa ligne de mire réponde au rayon viſuel HG du niveau. L'un des Aides en B meſurera la hauteur GB. Comparant enſuite les hauteurs AF & GB, leur difference donnera celle de l'élévation des points ou termes A & B.

Suppoſons, par exemple, que AF ait été trouvée de 5 pieds 9 pouces, & BG de 2 pieds 10 pouces, la difference de ces deux lignes qui eſt 2 pieds 11 pouces ſera la quantité dont B eſt plus élevé que le point A. Ce qui eſt évident.

REMARQUES.

I.

1292. Il eſt clair qu'en opérant ainſi, c'eſt-à-dire, en mettant le niveau au milieu de la diſtance des deux termes du nivellement, on trouve les points F & G dans le véritable niveau ; car comme les diſtances CA, CB ſont ſenſiblement égales, les differences du niveau apparent au véritable le ſont auſſi : Enſorte que ſi le point G eſt, par exemple, plus élevé d'un pouce que le point du véritable niveau qui lui répond, F ſera plus élevé que le point de véritable niveau qui lui répond de la même quantité : Ainſi F & G ſeront également diſtant du centre de la terre, & par conſéquent ils ſeront dans le véritable niveau.

D'où il ſuit, que dans le nivellement moyen il n'y a point de correction à faire de la difference du niveau apparent au véritable pour avoir deux points parfaitement de niveau.

II.

1293. Le nivellement moyen a encore un autre avantage, c'eſt qu'il fait éviter les erreurs cauſées par la réfraction (*a*) ; car ſi elle éleve ou baiſſe le point G

(*a*) On appelle *Réfraction* le détour que fait un rayon de lumiere, lorſque paſſant d'un milieu dans un autre, ou d'un eſpace d'une certaine nature dans un autre d'une eſpece differente, comme de l'air dans l'eau ou dans le verre, il ſe briſe en montant un peu au-deſſus de ſa direction, ou en deſcendant au-deſſous.

Pl. 23. Fig. 2. Soit, par exemple, un vaſe *a b c d* rempli d'eau, & ſoit ſuppoſé qu'un rayon de lumiere qui vient de A rencontre obliquement la ſurface de cette eau en B. Au lieu de continuer ſa direction en C, ſuivant le prolongement de A B, il ſe détournera en faiſant avec ſa direction B C l'angle C B D. Ce détour ou cette briſure eſt ce qui ſe nomme *réfraction*, & l'angle C B D ſe nomme l'*angle de réfraction*.

La réfraction eſt differente, ſuivant les differens milieux dans leſquels paſſe le rayon de lumiere ; mais elle n'a lieu que lorſque ce rayon tombe obliquement ſur une ſurface, car lorſqu'il tombe perpendiculairement il s'enfonce en ſuivant ſa même direction perpendiculaire.

Si par le point B où un rayon de lumiere A B rencontre une ſurface *a d*, on éléve une perpendiculaire E B prolongée juſqu'en G dans le milieu X ; ſi ce milieu eſt plus épais, plus ſerré ou plus condenſé que le milieu Y, d'où ſort le rayon A B, ce rayon ſe briſera en s'approchant de la perpendiculaire B G ; & s'il ſort du milieu X plus condenſé que Y, pour paſſer dans ce milieu, il le fera en s'éloignant de la perpendiculaire F G : Enſorte que s'il va de C en B, au lieu de ſuivre la direction C B E, il s'en écartera pour prendre celle de B A, qui s'éloigne davantage de F G.

Lorſque la réfraction ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire, elle fait paroître l'objet plus élevé ſur la ſurface qui ſépare les deux milieux, qu'il ne l'eſt effectivement, & elle le fait paroître plus bas lorſqu'elle ſe fait en s'éloignant de la même perpendiculaire.

d'une

d'une certaine quantité, elle fera le même effet à l'égard du point F ; c'eſt pourquoi ces points ſe trouveront toujours dans le véritable niveau.

Car ſi l'on ſuppoſe que la ſurface *a d* ſépare le milieu Y du milieu X qui eſt plus condenſé, & qu'un rayon qui partiroit, par exemple, d'une étoile A vienne rencontrer obliquement *a d*, comme ce rayon ſe détourne de ſa direction en changeant de milieu pour prendre celle de B D plus proche de la perpendiculaire F G, ſi l'on ſuppoſe qu'il y ait un obſervateur en D, il verra l'étoile ſuivant la direction D B, & il la ſuppoſera au point E qui eſt dans cette direction, lequel eſt plus élevé ſur la ſurface *a d* que A. Si au contraire le milieu X eſt plus rare ou moins ſerré que Y, & qu'il parte auſſi un rayon de lumiere d'une étoile E, comme ce rayon en entrant dans le milieu X s'éloiguera de la perpendiculaire F G, & qu'il prendra la nouvelle direction B C, l'Obſervateur qui verra le point C, ſuppoſera l'étoile dans la direction C B, c'eſt-à-dire au point A, qui eſt moins élevé que E ſur la ſurface *a d*.

Il eſt aiſé de prouver la réfraction par une expérience extrêmement facile à exécuter.

Il faut avoir un vaſe creux B G *c d*, mettre une piece d'argent ou quelque autre choſe de remarquable & de peſant au fond du vaſe, en un point quelconque D, où il puiſſe demeurer fixement; Enſuite ſe reculer doucement du vaſe, juſqu'à ce qu'en regardant la piece par le bord du vaſe B on la perde entiérement de vûe. Cela fait, il faut reſter dans cette poſition, & faire emplir le vaſe d'eau ; alors l'objet D qui avoit diſparu à l'obſervateur, qu'on ſuppoſe en A, lui reparoîtra en C. Ce qui fait voir que le rayon qui part de l'objet D ſortant de l'eau du vaſe X, ſe briſe en s'éloignant de la perpendiculaire F B ; ainſi ce rayon va rencontrer l'œil de l'Obſervateur en A qui voit ainſi l'objet en C dans la direction de A B. Pl. 23. Fig 2.

Il ſuit de cette legere expoſition de la réfraction que dans les nivellemens, elle peut changer la hauteur des objets que l'on bornoye, ſuivant les differens changemens de l'air, ou du milieu où l'on opére. C'eſt ce que l'expérience rend encore viſible ; car ſi l'on place une lunette d'approche dans une ſituation immobile, alignée à quelque objet remarquable, on voit que ſuivant les differens tems qu'il fait, elle ne répond plus au même objet. Auſſi M. Picard remarque-t'il qu'un objet qui à la premiere pointe du jour aura paru dans le niveau, & même un peu

Du Nivellement composé.

Pl. 13 Fig. 3. 1294. On ſuppoſe, par exemple, qu'il y a une ſource en A qu'on veut faire conduire en B qui en eſt éloigné de ſix ou 700 toiſes. Pour cela, il faut ſçavoir ſi A eſt plus élevé que B, ou qu'elle eſt la difference du niveau de ces deux points.

Comme la diſtance eſt trop grande pour qu'un ſeul coup de niveau puiſſe porter du point A au point B, que d'ailleurs on ſuppoſe qu'il ſe trouve entre ces points des élévations & des abbaiſſemens du terrain trop conſidérables pour qu'on puiſſe appercevoir de A une perche miſe en B, il faudra donner pluſieurs coups de niveau pour parvenir à la connoiſſance demandée, c'eſt-à-dire, faire un nivellement composé.

Pour cet effet, il faut dans cet exemple partager la diſtance A B en trois parties à peu près égales A C, C D, & D B.

On cherchera après cela à poſer le niveau dans le

au-deſſus, paroîtra enſuite au-deſſous, quelque tems après le lever du ſoleil; & qu'au contraire après que le ſoleil eſt couché, les objets fort éloignés paroiſſent quelquefois ſe hauſſer ſi conſidérablement qu'en moins d'une demi heure, la hauteur apparente eſt augmentée de plus de trois minutes. La cauſe de ces apparences eſt, ſelon M. Picard, la fraîcheur de la nuit qui condenſe les vapeurs, & qui fait qu'elles deſcendent aux plus bas lieux, ce qui laiſſant l'air des lieux plus élevés beaucoup plus pure que durant le jour, doit cauſer une plus grande réfraction; mais quand l'action du ſoleil a fait monter une partie des vapeurs juſqu'aux lieux les plus élevés, il doit y avoir moins de difference de milieu, & par conſéquent moins de réfraction.

Dans les grands nivellemens, où l'on adapte des lunettes aux niveaux, on a égard à la réfraction, c'eſt-à-dire, qu'on corrige la hauteur apparente pour la réduire à la véritable; mais dans les petites cette correction n'eſt pas néceſſaire, parce que la réfraction ne peut y cauſer aucune erreur ſenſible.

milieu de la premiere partie, par exemple en E, dans l'alignement de A B, & on enverra des Aides en A & en C avec de grandes perches, & le carton ordinaire. Ils y poſeront ces perches le plus perpendiculairement qu'ils le pourront, & dans l'alignement de A B, & de l'inſtrument E.

L'Obſervateur regardera enſuite par Q & par P le point H de la perche A qui ſe trouve dans le rayon de mire de la ſuperficie de l'eau des deux bouteilles du niveau. Puis venant en P, il regardera par P & Q le point I de la perche C I, qui eſt de niveau avec le point H de la premiere. Cela fait, les Aides qui ſont en A, meſureront la hauteur A H qu'on ſuppoſe de 7 pieds 5 pouces. Ils écriront cette hauteur ſur un papier ſur lequel ils feront deux colomnes ; ſçavoir, l'une pour écrire les differences qui iront en montant, & l'autre pour celles qui iront en deſcendant. La premiere aura pour titre *Colomne des élévations*, & la ſeconde, *Colomne des abbaiſſemens*.

Dans cet exemple, l'Aide en A, chargé d'écrire les differences du niveau, écrira dans la premiere colomne 7 pieds 5 pouces.

A l'égard des Aides qui ſont en C, ils marqueront exactement ſur la perche C I, ſoit par un coup de crayon ou autrement, le point de mire I, & ils reſteront dans la même place en tenant la perche C I dans la même poſition, parce qu'elle doit auſſi ſervir à la ſeconde *ſtation* ou opération.

Par cette premiere opération, il eſt évident que les points H & I ſont dans le même niveau.

Pour la ſeconde, l'Obſervateur ſe tranſportera avec le niveau à peu près au milieu de C D, où il ſe placera en F, toujours dans l'alignement de A B. Il enverra en D les Aides qui étoient en A, & ils y poſeront. perpendiculairement la perche D N dans

l'alignement de l'inſtrument & de C I, ou dans celui de A B, qui eſt le même.

L'Obſervateur ſe plaçant en S regardera par S, & par R le point L de la perche C I qui répond à la ſuperficie de l'eau des bouteilles du niveau ; on le ſuppoſe au-deſſous du point I ; puis ſe plaçant en R, il bornoyera par R & par S le point M de la perche D N.

Comme on ſuppoſe que le point L eſt au-deſſous du point I, les Aides qui ſeront en C, & qui auront auſſi comme les premiers un papier pour écrire les differences des niveaux, meſureront I L qu'ils écriront dans la colomne des abbaiſſemens : on la ſuppoſe de 2 pieds 9 pouces.

Quand aux Aides qui ſont en D, ils marqueront ſur la perche D N, le point M qui répond au rayon viſuel R S M du niveau, & ils reſteront dans la même poſition au point D.

L'Obſervateur quittera le lieu F, & il viendra ſe placer en G dans le milieu de D B, toujours dans l'alignement de A B, & les Aides qui étoient en C ſe tranſporteront en B, où ils poſeront leur perche perpendiculairement ſur B.

Enſuite l'Obſervateur ſe placera vers V, & regardant par V & par T, il déterminera le point N dans l'alignement de ſon niveau ſur la perche D N ; on ſuppoſe qu'il eſt plus élevé que M. L'Obſervateur paſſant vers T, & regardant par T & par V la perche B O, il déterminera ſur cette perche le point O dans le véritable niveau du point N.

Cela fait, l'un des Aides en D meſurera la ligne M N, & il écrira la valeur ſur la colomne des élévations de ſon mémorial : on la ſuppoſe de 2 pieds 5 pouces.

Les Aides qui ſont en B meſureront auſſi la hau-

teur B O, qui étant priſe au-deſſous du point O ou en deſcendant, doit être écrite dans la colomne des abbaiſſemens : on la ſuppoſe de 4 pieds 6 pouces.

Ces opérations étant ainſi faites, on additionnera enſemble, d'une part les grandeurs montantes A H & N M, & d'une autre celles qui vont en deſcendant I L & O B. De la ſomme des premieres qui eſt 9 pieds 10 pouces, on ôtera celle des ſecondes qui eſt 7 pieds 3 pouces, il reſtera 2 pieds 7 pouces pour la quantité, dont A eſt plus bas que B. Ce qui fait voir que la ſource A ne pourroit être conduite en B.

Il eſt évident qu'on déterminera de la même maniere la difference du niveau de deux points plus éloignés, dans le nivellement deſquels on ſera obligé de faire un plus grand nombre de ſtations.

Modele du Mémorial ſur lequel on écrit les hauteurs aſcendantes & deſcendantes.

Colomne des élévations.	*Colomne des abbaiſſemens.*
7 pieds 5 pouces.	2 pieds 9 pouces.
2 — 5	4 — 6
9 — 10	7 — 3

REMARQUES.

I.

1295. Il eſt évident que ſi la ſomme des abbaiſſemens avoit été dans l'exemple précedent, plus grande que celle des élévations, le point B auroit été plus bas que le point A de l'excès des abbaiſſemens ſur les élévations, & que ſi les ſommes de deux

colomnes étoient égales, les deux points A & B ſeroient de niveau.

II.

1296. Que dans les nivellemens compoſés, faits de la maniere qu'on vient de l'enſeigner, c'eſt-à-dire, par pluſieurs nivellemens moyens, on n'eſt point obligé d'avoir égard à la difference du niveau apparent au véritable, parce que dans chaque opération l'on a toujours des points qui ſont dans le véritable niveau.

III.

1297. Que ſi l'on a un nivellement à faire en montant, il eſt plus commode de le commencer par le point le plus élevé pour le faire en deſcendant, parce qu'alors on peut donner de plus grands coups de niveau, & que d'ailleurs deux perſonnes peuvent niveller en même-tems de chaque côté de l'élévation, c'eſt-à-dire, vers chaque terme, ce qui abrege beaucoup la durée de l'opération.

1298. Ce que l'on vient de dire ſur le nivellement & ſur l'uſage du niveau d'eau eſt abſolument ſuffiſant pour les travaux ordinaires des fortifications, & même pour niveller des objets aſſez éloignés, en ſe ſervant du nivellement compoſé. Mais comme il y a des cas où ces opérations demandent une exactitude que le niveau d'eau ne ſçauroit donner, on a imaginé des niveaux d'une autre eſpece à poids & à lunette, pour y ſuppléer. Les principaux ſont ceux de Mrs *Picard* & *Huygens*. On ne s'arrêtera pas à en donner ici la conſtruction & l'uſage. Ceux qui ſeront bien aiſe de connoître tout le détail dont cette matiere eſt ſuſceptible, pourront conſulter le Traité du Nivellement de M. *Picard*, celui de M. *Mariotte*, de M. *Bulet*, &c. On donnera ſeulement encore ici

une notion d'une eſpece de nivellement qu'on appelle *réciproque*, par lequel on a immédiatement deux points dans le véritable niveau, c'eſt-à-dire, ſans faire la correction du niveau apparent au véritable, & cela, dans une diſtance plus grande que la portée du niveau d'eau.

Du Nivellement réciproque.

1299. On ſuppoſe qu'on ſe ſert dans cette opération d'un niveau à lunette & à poids, lequel poids, fait tenir la lunette dans une ſituation perpendiculaire à la direction du poids ou au rayon prolongé de la terre; comme auſſi que le terrain ne permet pas qu'on puiſſe placer le niveau dans le milieu de la diſtance propoſée, c'eſt-à-dire, ſe ſervir du nivellement moyen qui ſeroit encore d'une exécution plus prompte.

Soient donc les points A & B dont on veut connoître la difference du niveau, éloignés de 6 ou 700 toiſes. Pl. 23. Fig. 4.

On poſera le niveau en A, & l'on aura un Aide placé en B avec une longue perche & un carton pour recevoir le rayon viſuel, comme dans les opérations précedentes.

On obſervera le point F, qui répond au centre de la lunette, lequel centre eſt ordinairement marqué par deux fils de ſoye qui ſe coupent perpendiculairement.

On fera marquer exactement le point F ſur la perche BD.

Cela fait, on ôtera le niveau de A, & l'on fera poſer à ſa place, ſur le point qui répond à la direction du poids, une longue perche AC, comme en B, ſur laquelle perche on marquera le point E de maniere qu'il réponde exactement à l'élévation du centre de

la lunette lors de l'obſervation du point F ſur la perche B D.

On ſe tranſportera avec le niveau en B; on le poſera à la place de la perche B D, mais de maniere que la direction du poids du niveau réponde exactement au point B, & le centre de la lunette au point F obſervée ſur B D.

On regardera après cela par la lunette la perche C A, & l'on fera marquer ſur cette perche le point G qui répond au rayon viſuel de la lunette. Cela fait, ſi l'on prend le point H également diſtant de E & de G, ce point ſera dans le véritable niveau avec le point F; enſorte que meſurant H A & F B, on aura la difference du niveau de ces deux points en ôtant la plus petite élévation de la plus grande.

Pour le démontrer, il faut conſidérer que les points E & F étant dans le niveau apparent, F eſt plus éloigné du centre de la terre que E, de la difference du niveau apparent au véritable que donne la diſtance des deux points A & B.

Les deux points F & G étant auſſi par l'opération dans le niveau apparent, G eſt plus éloigné du centre de la terre que F, de la même difference du niveau apparent au véritable que donne la diſtance A B: D'où il ſuit que G eſt plus éloigné du centre de la terre que E de deux fois cette difference; mais ayant pris le point H au deſſus du point E, de la moitié de E G, H eſt alors plus éloigné du centre de la terre que E, ſeulement de la difference du niveau apparent au véritable ſur la diſtance A B; mais F en eſt auſſi plus éloigné de la même quantité: Donc, &c.

On voit que cette méthode donne, comme le nivellement moyen, deux points H & F dans le véritable niveau, & cela, ſans égard à la réfraction qui ſe trouve également compenſée de part & d'autre; ſi

l'on ſuppoſe que le milieu où ſe fait l'operation ſoit de même nature, c'eſt-à-dire, également rare ou condenſé.

APPLICATION de la Trigonométrie.

1300. On a déja réſolu dans le premier Volume, la plupart des Problêmes de la Trigonométrie; mais on l'a fait par le moyen d'une échelle & de la conſtruction des figures ſemblables; méthode bien moins exacte que celle du calcul trigonométrique : En effet, dans ces ſortes de réſolutions, pour qu'un pied ſoit, par exemple, une grandeur ſenſible, il faut, ſi la figure a une étendue conſidérable, qu'elle ſoit conſtruite ſur une échelle où la grandeur d'un pied ſe puiſſe marquer; mais alors la figure peut auſſi devenir d'une grandeur embaraſſante : Ajoutez à cela qu'il eſt difficile de tracer les lignes auſſi fines qu'il faut qu'elles le ſoient pour que l'operation ait quelque juſteſſe, & qu'on puiſſe diſtinguer nettement les points d'interſection. Les angles faits avec le rapporteur, ne peuvent pas ſe faire non plus avec exactitude, à cauſe de la petiteſſe de l'inſtrument qui ne permet pas qu'on puiſſe avoir égard aux minutes. Tout cela doit faire ſentir l'avantage des operations qui ſe font par le calcul trigonométrique, ſur celles qui ſe font par l'échelle : ces dernieres ne doivent abſolument avoir lieu que lorſque l'erreur d'un pied ou de deux, & même d'une toiſe, n'eſt pas d'une grande importance.

OBSERVATION

Sur les diviſions des inſtrumens propres à meſurer les angles pour le calcul trigonométrique.

1301. Pour que le calcul trigonométrique donne

toute la juſteſſe qu'on en doit attendre, il faut meſurer les angles ſur le terrein avec des inſtrumens dont les dégrés ſoient diviſés en minutes, ou au moins de 5 en 5 minutes.

Pour qu'un demi-cercle ſoit diviſé en minutes, il faut qu'il ait au moins 8 ou 10 pouces de rayon. Ces diviſions ſe font ordinairement par des traverſalles ou lignes qui vont obliquement de la circonférence antérieure de l'inſtrument à l'intérieure.

Pl. 24. Fig. 1. 1302. Soit, pour en donner une idée, l'arc AB d'un dégré, terminé par les deux rayons CA & CB (*a*). Soit AD la largeur de l'eſpace ſur lequel les diviſions de l'inſtrument doivent être faites : cette partie ſe nomme *le limbe* du demi-cercle.

Soit le dégré AB diviſé en ſix parties égales, chacune de ces parties vaudra la ſixiéme d'un dégré, c'eſt-à-dire, 10 minutes.

Soit tiré auſſi l'arc DE concentrique à AB, qu'on diviſera de même que AB en ſix parties égales.

Cela fait, il ne s'agit plus que de partager une partie de AB comme AF, en dix parties égales, afin d'avoir l'arc d'une minute.

Pour cela, on fait paſſer la circonférence d'un cercle par les trois points F, D, C : on diviſe l'arc DF en dix parties égales, & par chacune de ces parties on décrit de C, pris pour centre, des circonférences ou des arcs concentriques à AB & DE ; les parties de ces arcs compriſes entre DA & DF, don-

(*a*) Il eſt évident que les rayons CA & CB de la Figure premiere, Planche 24, ſont plus petits que celui du demi-cercle dont l'arc AB ſeroit d'un dégré. On ne leur a pas donné dans cette Figure leur véritable longueur, parce qu'elle eſt plus grande que la hauteur de la Planche, & que d'ailleurs comme on ne ſe propoſe que de donner une idée de la diviſion des inſtrumens en minutes, cette Figure, quoique peu exacte, peut autant ſervir à cet objet qu'une Figure qui le ſeroit davantage.

nent les dix diviſions de AF, c'eſt-à-dire, que la premiere ; proche le point D, eſt l'intervalle d'une minute, la ſeconde, en allant vers A, de deux, &c.

Pour le démontrer, il faut conſiderer que les dix parties de DF étant égales & priſes ſur le même arc CDF, ſi d'un point C pris ſur cet arc on tire des lignes à toutes ces diviſions, les angles compris entre chacune d'elles ſeront égaux, parce qu'ils auront pour meſure des arcs égaux * : ainſi celui qui ſera formé par une ligne tirée du centre C de l'inſtrument à la premiere diviſion de DF, en allant vers B & par CD prolongée, ſera la dixiéme partie de celui qui ſera formé de CA & de CF ; Mais cet angle eſt de dix minutes par la conſtruction : Donc celui qui ſera meſuré par la premiere diviſion, dont on vient de parler, ne ſera que d'une minute. * N°. 199.

Décrivant de la même maniere des arcs par le point C & les diviſions de AB & DE, on aura le dégré ABDE partagé en lignes tranſverſales, qui en donneront la diviſion de minutes en minutes.

1303. On peut par la même méthode diviſer le limbe d'un demi-cercle, de cinq en cinq minutes ; mais en voici une autre pour diviſer ainſi un graphometre de cinq ou ſix pouces de rayon. La négligence des Ouvriers ou l'attention que demande cette diviſion, en avoit fait diſcontinuer l'uſage ; mais M. *Langlois*, dont tout le monde connoît l'habileté, l'a renouvellé avec ſuccès.

Cette méthode conſiſte à terminer chaque extrémité de l'alidade par un arc de cercle de onze dégrés, de même rayon que l'inſtrument, diviſé en douze parties égales, & de maniere que le commencement de la premiere diviſion de cet arc réponde exactement à la ligne qui paſſe par le centre de l'inſtrument & par l'ouverture des deux pinulles de cet alidade.

Il eſt décrit du même côté de l'alidade, c'eſt-à-dire, qu'il s'étend de part & d'autre ſur les diviſions du limbe du demi-cercle.

Il eſt évident que ſi cet arc étoit de douze dégrés, chacune de ſes parties ſeroit d'un dégré ; mais que comme il eſt plus petit d'un dégré, elles ſont chacune plus petite de la douziéme partie du dégré, c'eſt-à-dire, de cinq minutes.

Il faut obſerver en meſurant des angles avec le graphometre ainſi conſtruit, que les arcs qui terminent l'alidade ſoient toujours hors de l'angle qu'on veut meſurer.

Préſentement, pour faire uſage de cette conſtruction, ſuppoſons, par exemple, qu'on ait meſuré un angle avec le demi-cercle, & que la ligne qui paſſe par le centre de l'inſtrument & l'ouverture des deux pinulles, & qu'on nomme *ligne de foy*, réponde à un point un peu au-delà du 52e dégré.

Pour ſçavoir la partie du dégré ou le nombre des minutes qu'il faut ajouter à 52 dégrés pour avoir la valeur totale de l'angle meſuré, il faut chercher le point de l'inſtrument qui répond exactement à une de ſes diviſions & à une de celles de l'arc de l'alidade, enſorte que les deux lignes qui marquent ces diviſions puiſſent être conſiderées comme une ſeule ligne. Suppoſons que le 59e dégré du demi-cercle convienne ainſi avec la ſeptiéme diviſion de l'arc de l'alidade ; comme chaque diviſion de cet arc vaut 5 minutes de moins qu'un dégré, il a paſſé autant de fois 5 minutes au-delà du 52e dégré qu'il y a de diviſions de l'arc de l'alidade au-delà de ce dégré, c'eſt-à-dire, 7 fois 5 ou 35 : ainſi l'angle dont il s'agit ſera donc de 52 dégrés 35 minutes. Il en ſera de même pour tous les autres angles qui contiendront des dégrés & des minutes.

Il eſt évident que quand la ligne de foy des pinulles de l'alidade ou de la lunette, ſi l'inſtrument eſt à lunette, répond exactement à une diviſion du limbe du demi-cercle, il n'y a point de minutes à ajouter aux dégrés de l'angle, & qu'il contient ſeulement le nombre qui ſe trouve compris entre le diametre de l'inſtrument & la ligne de foy de l'alidade.

1304. Comme ces ſortes d'inſtrumens ne peuvent être diviſés avec trop d'attention & d'exactitude, pour la juſteſſe des opérations, on les éprouve ou vérifie en meſurant dans la campagne différens angles autour d'un même point & à peu près dans le même plan, mais qui comprennent la circonférence entiere de l'horiſon. Il eſt évident que ſi l'inſtrument eſt bien diviſé, ils vaudront enſemble 360 dégrés * ; s'ils en different ſeulement d'une ou de deux minutes, l'inſtrument peut être regardé comme exact, s'il eſt diviſé en minutes ; mais ſi l'erreur étoit plus conſidérable, il faudroit y avoir égard dans la meſure particuliere des angles, c'eſt-à-dire, les diminuer ou augmenter proportionnellement à l'erreur de l'inſtrument. *N°. 99.

PROBLEMES

De Trigonométrie.

PREMIER PROBLEME.

1305. *Trouver la longueur d'une ligne acceſſible ſeulement par ſes deux extrémités.*

Soit, par exemple, A B l'ouverture d'un précipice que l'on veut connoître. Pl. 24. Fig. 2.

On choiſira un point C dans la campagne, duquel on puiſſe aller directement en A & en B : on

meſurera enſuite les lignes CA & CB & l'angle ACB, & l'on aura le triangle ACB dont les deux côtés CA & CB ſeront connus de même que l'angle compris C.

On cherchera la différence des angles A & B par cette analogie :

La ſomme des deux côtés AC & CB, eſt à leur différence,
Comme la tangente de la moitié du ſupplément C
Eſt à la tangente de la moitié de la différence des angles A & B oppoſés à C *.

* N°. 1258.

Cette moitié étant connue, elle fera connoître les angles A & B, après quoi on trouvera AB par cette ſeconde analogie :

Le ſinus de l'angle A
Eſt à ſon côté oppoſé CB,
Comme le ſinus de C
Eſt au côté oppoſé AB *.

* N°. 1256.

REMARQUE.

Pl. 24. Fig. 3. 1306. Comme il eſt difficile de meſurer les angles ſans commettre quelque erreur, il eſt à propos d'examiner ici quelle doit être la poſition ou le choix du point C, pour avoir la plus petite.

Suppoſons, par exemple, que l'angle ACB ait été trouvé de quelques minutes de plus que ſa véritable valeur, ou qu'on ait meſuré ACD au lieu de ACB, & que le premier ſoit de quelques minutes plus grand que le ſecond, c'eſt-à-dire, de l'angle BCD : Suppoſons auſſi que le diametre immobile de l'inſtrument ait été poſé ſur AC, & que l'erreur a été commiſe vers BC ; Il eſt évident que les deux triangles ACB, ACD, ayant leurs deux côtés AC,

CB & AC, CD égaux, & que l'angle compris ACB du premier étant plus petit que l'angle compris ACD du second, la baſe AB du premier ſera plus petite que AD qui eſt celle du ſecond *: C'eſt pourquoi le calcul donnera AD plus grande que la véritable diſtance AB qu'on ſe propoſe de trouver. * N°. 145.

Soit du point A, pris pour centre, & de l'intervalle AB, décrit ſur AD l'arc BE; l'on aura ED, qui ſera l'excès de AD ſur AB. Soit auſſi de C & de l'intervalle CB décrit l'arc BD, qui meſure l'angle d'erreur BCD: comme cet angle eſt fort petit, l'arc BD peut être conſideré comme une ligne droite perpendiculaire à CB: l'arc BE, qui eſt auſſi très-petit, peut de même être regardé comme une ligne droite perpendiculaire aux deux rayons AB & AE ou AD.

On a alors le triangle rectangle BED, dont ED eſt l'excès de AD ſur AB; & l'hypoténuſe BD, la meſure de l'angle d'erreur BCD. Or dans ce triangle, ED eſt à BD comme le ſinus de l'angle EBD eſt au ſinus total *; mais l'angle CBA eſt égal à EBD, parce que ABE étant droit, de même que CBD, ôtant de chacun le même angle CBE qui en fait partie, le reſte ABC ſera égal à EBD: D'où il ſuit que *l'excès ED eſt à la meſure de l'angle de l'erreur, comme le ſinus de l'angle ABC oppoſé à AC, eſt au ſinus total.* * N°. 1215.

Ainſi plus l'angle ABC approchera du droit, & plus l'erreur ſera grande; & elle ſera égale à l'arc BD, lorſque cet angle ſera de 90 dégrés; & au contraire, plus il ſera petit, & plus l'erreur le ſera également, c'eſt-à-dire, l'excès de AD ſur AB.

D'où l'on voit qu'il faut choiſir le point C le plus près qu'on peut de A, comme en G; car l'angle AGB ſera alors plus grand que ſon oppoſé interieur ACB *: * N°. 125.

Donc G B A eſt plus petit que C B A : Donc ſon ſinus ſera auſſi plus petit, & par conſéquent l'excès qui réſultera de l'erreur commiſe dans la meſure de l'angle A G B, ſera plus petit que E D.

Si l'angle de l'erreur eſt ſuppoſé diminuer l'angle vrai A C B, on trouvera de même que la différence qui en réſultera ſur A B, ſera à l'arc de l'erreur comme le ſinus de l'angle A B C eſt au ſinus total : D'où il s'enſuivra encore que le côté A D approchera d'autant plus du côté vrai A B, que l'angle A B C ſera petit.

SECOND PROBLEME.

1307. *Trouver la largeur d'une Riviere ou la longueur d'une ligne acceſſible ſeulement par une de ſes extrémités.*

Pl. 24. Fig. 4. Soit la Riviere C D, dont on veut avoir la largeur.

On prendra une baſe A B, comme on l'a expliqué N. *162*, pour la réſolution du même Problême avec l'échelle ; & ayant fait l'angle droit C A B & meſuré avec le demi-cercle l'autre angle C B A, qu'on ſuppoſe de 49 dégrés 25 minutes, on ôtera cet angle de 90 dégrés afin d'avoir la valeur de C, qui ſera de 40 dégrés 35 minutes ; on meſurera auſſi A B, qu'on ſuppoſe de 120 toiſes, & l'on trouvera enſuite A C par cette analogie :

Comme le ſinus de l'angle C
Eſt à ſon côté oppoſé A B,
Ainſi le ſinus de B
Eſt au côté C A.

C'eſt-à-dire, en mettant dans cette analogie les ſinus de C & de B & la valeur de A B,

65055. 120 :: 75946. C A.

Faiſant

Faiſant cette Regle de proportion, on aura CA de 140 toiſes 6 pouces : ôtant AD de cette ligne, c'eſt-à-dire, la diſtance de la baſe AB au bord de la riviere, il reſtera la valeur de CD, qu'il falloit trouver ; ce qui eſt évident *. *N°. 1256.

REMARQUES.

I.

1308. On a déja obſervé la néceſſité d'avoir de grandes baſes dans la réſolution des Problêmes de la Trigonométrie, afin que les angles formés par la rencontre des lignes qu'on ſe propoſe de déterminer, ne ſoient ni trop aigus ni trop obtus. On va examiner ici en peu de mots les raiſons que la Géométrie fournit pour le choix de ces baſes, afin que les erreurs preſque inévitables qu'on commet dans la meſure des angles, influent le moins ſur les lignes ou les objets dont on veut meſurer la diſtance.

Soit, par exemple, dans la réſolution du Problême précédent, l'angle ABG meſuré ſur le terrein, de deux ou trois minutes de plus que ABC qu'on vouloit meſurer, c'eſt-à-dire, de l'angle CBG, qui n'eſt ainſi que de quelques minutes. Pl. 24. Fig. 5.

Il eſt évident que ABG donnera le côté AG qui lui eſt oppoſé, plus grand que AC oppoſé à l'angle vrai ABC.

Si de B pris pour centre, & de l'intervalle BC, on décrit le petit arc CE ſur BG, il pourra, à cauſe de ſa petiteſſe, être regardé comme une ligne droite perpendiculaire aux rayons BC & BG ; ce qui donnera le petit triangle rectangle CEG, dont le côté CE eſt la meſure de l'angle d'erreur CBG, & l'hypoténuſe CG l'excès de AG ſur AC. Or dans ce triangle CG eſt à CE, comme le ſinus total eſt au

* N°. 1255. sinus de G *; l'angle ACB eſt égal à G, parce que cet angle joint à GCE vaut un droit, & que ACB joint au même angle vaut également un droit; les trois angles de ſuite ACB, BCE & ECG valent deux droits; & BCE étant droit, ECG eſt le complement de G & de ACB : Donc ces deux angles
* N. 95. ſont égaux *; Donc *l'excès GC eſt à CE, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle ACB égal à G.*

Préſentement il faut conſiderer que CE, qui eſt perpendiculaire ſur BG, ſera toujours plus petite que CG qui eſt oblique ſur la même ligne; mais que CG ſera d'autant plus petite qu'elle approchera de CE, c'eſt-à-dire, que le ſinus total approchera du ſinus de ACB, ou que cet angle différera peu de 90 dégrés.

D'où il ſuit, que la baſe AB doit être priſe aſſez grande pour que ABC ſoit toujours plus petit que ACB, ou au-deſſous de 45 dégrés : s'il ſe trouve plus grand, il faut prolonger ſa baſe comme en H, & l'on aura alors l'angle intérieur AHC plus petit
* N°. 125. que ſon extérieur ABC*. Il eſt clair qu'on le rendra auſſi petit qu'on voudra, en prolongeant ainſi la baſe au-delà du point B; ce qui démontre la néceſſité d'une grande baſe dans l'opération dont il s'agit, afin que l'erreur commiſe dans la meſure de l'angle ABC, en ajoute une moindre à la ligne à meſurer AC.

Pl. 24. Fig. 6. 1309. Si l'on ſuppoſe que l'erreur CBG, au lieu d'augmenter l'angle ABC le diminue, on trouvera de même que la quantité qu'il retranche de AC eſt à GE, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle ACB, oppoſé à la baſe AB : D'où il s'enſuivra auſſi que cette différence ſera d'autant plus petite que l'angle ACB différera peu de 90 dégrés, ou que la baſe AB ſera grande.

II.

1310. Si dans la réſolution du Problème précédent, au lieu de faire l'angle BAC droit, on le fait aigu, on déterminera également le côté AC; parce que dans le triangle ACB connoiſſant la baſe & les angles de la baſe, il eſt aiſé de trouver ſes deux autres côtés * : mais AC, dans cette ſuppoſition, n'étant point perpendiculaire ſur AB, ne donnera point la largeur de la riviere. * N°. 1168.

Pour la trouver, il faut déterminer la perpendiculaire CK abbaiſſée du point C ſur AB. Le triangle ACK ſera rectangle en K; on connoît l'angle aigu KAC & le côté AC. On aura donc CK par cette analogie : Pl. 24. Fig. 7.

Le ſinus total
Eſt au ſinus de l'angle A,
Comme le côté AC
Eſt à CK *. * N. 1255.

1311. Si dans la meſure du ſecond angle BAC, on commet la même erreur que dans le premier ABC, c'eſt-à-dire, ſi on le fait plus grand que ſa véritable grandeur de l'angle CAF, qui eſt auſſi de quelques minutes, on aura le côté AF qui ſurpaſſera AG, & qui ajoutera une nouvelle erreur à AC.

Pour déterminer le rapport de cette erreur à la meſure du petit angle GAF, du point A pris pour centre & de l'intervalle AG, on décrira le petit arc GL, qui pourra être conſideré comme une ligne droite perpendiculaire aux rayons AG & AL ou AF; ce qui donnera le petit triangle rectangle GLF, dans lequel l'angle F eſt égal à AGB, parce qu'ils ont le même complement LGF. Or dans le triangle GLF, l'excès LF eſt à LG, comme le ſinus de LGF, qui

* N°. 1256. eſt le complement de F, eſt au ſinus de LFG*; mais
* N°. 228. l'angle ACB moins CBG, eſt égal à AGB*: D'où il ſuit, que LF eſt à LG, comme le ſinus du complement de ACB moins CBG eſt au ſinus de ACB moins CBG; ou bien, comme l'angle CBG peut être négligé dans cette analogie à cauſe de ſa petiteſſe, l'on aura, *LF eſt à LG, comme le ſinus du complement de ACB eſt au ſinus de ce même angle ACB.*

Ainſi l'erreur LF ſera d'autant plus petite que l'angle ACB approchera du droit, ou ce qui eſt la même choſe, que la valeur des deux angles de la baſe AB différera peu de 90 dégrés; car alors le complement de ACB ſera plus petit & par conſéquent ſon ſinus. Or on a vû dans l'examen de la meſure de l'angle ABC, que la baſe AB devoit être priſe de maniere que ABC ſe trouvât toujours au-deſſous de 45 dégrés; on voit préſentement par l'examen de CAB qu'elle doit être priſe du côté de A, enſorte que CAB ſoit au-deſſus de 45 dégrés, & que les deux angles A & B joints enſemble valent un angle droit ou 90 dégrés.

III.

1312. Si l'erreur commiſe en A avoit diminué l'angle A au lieu de l'augmenter, elle auroit diminué le côté AG, & par conſéquent elle auroit pû détruire l'erreur de la meſure de B. Ainſi des erreurs peuvent ſe compenſer ou ſe corriger mutuellement, ce qui arrive quelquefois dans de grandes opérations; mais il eſt à propos, lorſqu'on veut operer exactement, de choiſir les baſes & les angles les plus favorables pour diminuer, autant qu'on le peut, les erreurs qui ſont preſque inévitables dans la prarique: c'eſt à quoi peuvent ſervir les remarques faites à l'oc-

caſion du premier Problême de cet article & du Problême précédent.

IV.

1313. Si les erreurs qu'on commet dans la meſure des angles en cauſent de conſidérables dans la poſition des objets qu'on veut déterminer, le défaut d'exactitude dans la meſure de la baſe n'en produit pas moins dans le reſte de l'opération; c'eſt pourquoi toutes les fois qu'on employe le calcul trigonométrique, il faut meſurer la baſe avec l'attention la plus ſcrupuleuſe.

Pour cela, il faut allignet beaucoup de piquets entre ſes extrémités; tendre un cordeau des uns aux autres, afin qu'on puiſſe poſer la meſure en ligne droite le long du cordeau; il faut auſſi avoir égard aux inégalités du terrain de la baſe, & obſerver que toutes ſes parties ſoient rapportées au terrain horiſontal ou qu'elles ſoient toutes dans le même niveau.

TROISIE'ME PROBLEME.

1314. *Trouver la diſtance de deux lieux entiérement inacceſſibles.*

Soient A & B les deux endroits inacceſſibles dont on veut ſçavoir l'éloignement. Pl. 24. Fig. 8.

On choiſira d'abord une baſe CD, vis-à-vis les objets A & B, de la maniere qu'on l'a expliqué N. 266.

On imaginera auſſi les lignes AC, AD, BC & BD, & ayant meſuré les angles ACD, CDA du triangle CAD, & les angles BCD, CDB du triangle CBD, on aura deux triangles dans leſquels on connoîtra la baſe AB & les angles de la baſe; c'eſt pourquoi on ſera en état de connoître les autres côtés de ces triangles.

On déterminera d'abord AD dans le premier triangle par cette analogie :

Le ſinus de l'angle C A D eſt à ſon côté oppoſé C D, comme le ſinus de A C D eſt à A D *.

* N°. 1268.

Et l'on déterminera B D dans le ſecond par cette autre analogie :

Le ſinus de l'angle C B D eſt à ſon côté oppoſé C D, comme le ſinus de B C D eſt à B D.

Les deux côtés D A & D B étant connus, on meſurera l'angle A D B qu'ils font enſemble, & l'on aura alors le triangle A D B dans lequel ayant deux côtés connus & l'angle compris, on viendra à la connoiſſance des angles de ſa baſe par le troiſiéme problême N. 1271. après quoi il ſera aiſé de déterminer A B de la même maniere qu'on a trouvé A D & B D par les analogies précedentes.

REMARQUE.

Pl. 24. Fig. 9.

Ce même problême peut ſervir à mener une parallele à une ligne inacceſſible ; car les angles de la baſe du triangle D A B ayant été trouvés par le calcul, on connoît l'angle B A D ; c'eſt pourquoi ſi l'on fait avec A D l'angle A D E égal à B A D, l'on aura la ligne E D parallele à A B *.

* N°. 257.

QUATRIE'ME PROBLEME.

1316. *Faire la Carte d'une Terre ou d'une Province.*

On a déja donné N. 284. les principales obſervations qui ſervent à l'opération dont il s'agit ici ; c'eſt pourquoi on ne dira qu'un mot de l'application du calcul trigonometrique à cette opération. Ayant

donc choiſi une baſe AB dans le lieu le plus favorable pour découvrir un grand nombre de poſitions C,D,E, F,G, H, &c. & meſurez les angles que font les lignes imaginées tirées de ces objets aux extrémités de la baſe ; il eſt évident qu'on a des triangles ACB, ADB, &c. dans leſquels la baſe & les angles de la baſe ſont nus, & qu'ainſi on déterminera la valeur de toutes ces lignes imaginaires, par cette analogie : Pl. 25. Fig. 1.

Comme le ſinus de l'angle oppoſé à la baſe
Eſt à la baſe ;
Ainſi le ſinus d'un des angles de la baſe
Eſt à ſon côté oppoſé.

Tous les côrés des triangles A C B, A D B, &c. étant ainſi déterminés, on les rapporte ſur le papier ſans avoir beſoin de rapporteur.

On fait une échelle d'une longueur proportionnée à l'eſpace qu'on veut donner à la Carte. On tire une ligne indéfinie pour la baſe, & on lui donne autant de roiſes de l'échelle que la baſe a été trouvée en avoir ſur le terrain. Enſuite des extrémités de cette baſe & de la grandeur des côtés des triangles, on décrit des arcs dont les points d'interſection donnent la poſition des objets C, D, E, &c. obſervés ſur le terrain. Ce qui eſt évident.

REMARQUES.

I.

1317. Si l'on veut opérer avec une grande exactitude, il faut, autant qu'il eſt poſſible, meſurer tous les angles de chaque triangle. Par exemple, ayant meſuré les deux angles C A B & C B A du triangle A C B, & ôté leur ſomme de 180 degrés, le reſte doit donner l'angle C * ; mais pour vérifier ſi les an- * N°. 225.

gles C A B & C B A ont été meſurés ſans erreur, il faut ſe tranſporter avec l'inſtrument en C, & meſurer l'angle A C B; s'il ſe trouve de la même valeur que celle qui réſulte de la ſouſtraction des angles de la baſe de 180 degrés, c'eſt une marque que l'opération eſt exacte. Si on lui trouve une difference ſenſible, il faut recommencer la meſure des angles C A B & C B A, & faire enſorte que les meſures particulieres de chacun des angles du triangle A C B donnent enſemble 180 degrés. Il faut auſſi avoir attention que les angles A D B, A E B, &c. formés par l'interſection des lignes A D, D B, &c. ne ſoient
* N°. 1311. point trop aigus *. Pour cela, il faut choiſir une baſe aſſez grande pour que les angles des triangles qui lui ſont oppoſés ne ſoient point au-deſſous de 45 degrés. Comme il n'eſt pas toujours aiſé de trouver de grandes baſes, il faut ſe borner à prendre d'abord la poſition des objets qui donnent des angles convenables avec la baſe A B; enſuite déterminer par ces poſitions une nouvelle baſe, comme A G ou A F plus grande que A B. Cette nouvelle baſe pourra ſervir à en trouver de plus grandes, avec leſquelles on pourra prendre la poſition des objets oppoſés, ſans être obligé d'admettre des angles trop aigus ou trop obtus.

II.

Pl. 25. Fig. 1. 1318. Il faut auſſi faire enſorte de prendre de deux ou trois endroits differens la poſition du même objet. Par exemple, le point E ayant été déterminé par le moyen du triangle A E B, & le point ou lieu D par le triangle A D B, on peut prendre A D pour la baſe, & déterminer encore par cette baſe la poſition de E, par la meſure des angles E A D, A D E: prenant enſuite B E pour la baſe, on peut trouver la

position du lieu F ; & prenant B F pout baſe, on pourra prendre une troiſiéme poſition du même lieu E. Il eſt évident que ſi toutes les meſures ſont exactes, on aura toujours l'objet E placé dans le même point ſur la carte ; mais s'il s'y eſt gliſſé des erreurs, chaque obſervation particuliere du même objet donnera une poſition particuliere. En ce cas, l'on aura trois poſitions par leſquelles il faudra faire paſſer la circonference d'un cercle, & placer l'objet E au centre de cette circonference, pour prendre une eſpece de terme moyen entre les erreurs des opérations. Il en ſera de même pour la vérification des autres lieux C, D, &c.

III.

1319. Lorſque les plus petites erreurs dans la meſure des angles en peuvent cauſer de conſidérables dans la détermination des objets, & qu'on opere avec des inſtrumens aſſez grands pour les faire diſtinguer, on réduit tous les angles *au centre* & *à l'horiſon*. On va donner une legere idée de chacune de ces corrections.

Pour entendre en quoi conſiſte la premiere, il faut Pl.25. Fig.2. ſuppoſer que d'un lieu élevé, comme de la partie ſupérieur X d'une tour ou de l'ouverture d'un clocher, on a du point C meſuré, par exemple, l'angle O C B formé par les rayons viſuels C O, C B, aux objets O & B. Cet angle n'eſt pas le même que ſi les rayons viſuels partoient du point M qu'on ſuppoſe le centre de la tour ou du clocher : Or la correction dont il s'agit, conſiſte à déterminer par la connoiſſance de M C, & des poſitions O & B, l'angle O M B qui a ſon ſommet au centre de la tour X, & qu'on appelle par cette raiſon l'angle au centre.

Pour cela, il faut obſerver que l'angle O A B eſt

* N°. 228. égal à O M B plus M O A ou M O C *, & que le même angle eſt auſſi égal à O C B plus C B A; ce qui fait voir qu'en ajoutant à O C B l'angle CBA, on a O A B, duquel retranchant M O C, il reſte O M B qui eſt l'angle au centre.

Il en eſt à peu près de même pour la détermination des angles au centre des autres objets.

1320. La ſeconde correction dont il reſte à dire un mot, a pour objet de réduire tous les angles obſervés dans differentes poſitions à l'égard du plan de l'horiſon, aux angles correſpondans du même plan.

Pl. 25. Fig. 3. Soient, par exemple, deux objets A & B également élevés ſur le plan C E D, & les perpendiculaires A D & B E les hauteurs de ces objets: Soit ſuppoſé auſſi un Obſervateur en C qui meſure l'angle A C B: & ſoit enfin tiré de C en D & en E, les lignes C D, C E, leſquelles donnent l'angle D C E tracé ou pris ſur le plan C E D; cet angle eſt celui qu'on rapporte ſur le plan ſur lequel on conſtruit la carte: Or, s'il differe du meſuré A C B incliné au plan CED, l'opération ne ſera pas exacte; pour qu'elle le ſoit, il faudra ajouter ou retrancher à A C B la quantité dont il differe de D C E. Il faut donc examiner s'il y a quelques differences entre ces angles.

Pour cela, conſiderez que les côtés C A, C B du triangle A C B ſont plus grands que C D & C E du triangle D C E, les premiers étant obliques à A D & B E, & les autres perpendiculaires aux mêmes lignes: Or, ſi l'on imagine que par A D & B E il paſſe deux plans paralleles, ils ſeront éloignés l'un de l'autre de D E ou de ſon égal A B; & ſi l'on conçoit enſuite que le triangle A C B eſt abbaiſſé ſur le plan A E D, ſa baſe A B tombera au-delà de D E, & par conſéquent l'angle A C B ſera dans l'angle D C E: Donc il ſera plus petit que cet angle, c'eſt-à-dire,

que l'horiſontal. Il en ſera de même ſi le point C eſt plus élevé que les points A & B.

Si les deux objets A & B ſont inégalement élevés ſur le plan C E D, l'angle obſervé A C B pourra être plus grand que l'horiſontal D C E ; car quoique les côtés C A & C B ſoient toujours plus grands que les horiſontaux C D, C E, la diſtance A B de la partie ſupérieure des objets A & B étant alors une ligne oblique entre les deux perpendiculaires A D & B E, peut être aſſez grande pour rendre l'angle obſervé plus grand que l'horiſontal D C E.

Cette explication peut faire connoître en quoi conſiſte la réduction des angles à l'horiſon. On ne donnera pas la maniere de faire cette réduction, parce qu'elle n'a pas lieu dans les opérations ordinaires, où l'on opére avec des inſtrumens trop petits pour avoir égard aux differences qui ſe trouvent entre les angles conſiderés ſur le plan de l'horiſon, & ceux qui ſont inclinés ſur le même plan de l'horiſon; d'ailleurs elles ne vont pas à deux minutes ſur des objets fort élevés ſur l'horiſon, & les inſtrumens ordinaires qui ne donnent les minutes que de cinq en cinq ne pouvant faire tenir compte de differences auſſi petites, elles peuvent être négligés ſans erreur ſenſible dans la réſolution des problêmes de la Trigonometrie.

Il en eſt de même de la réduction des angles au centre ; mais ceux qui voudront ſe mettre en état de faire ces ſortes de corrections, pourront conſulter les Memoires de l'Academie Royale des Sciences, année 1736, page 69 & ſuivantes de l'édition de Paris, & page 87 & ſuivantes de l'édition *in*-12. de Hollande.

CINQUIE'ME PROBLEME.

1321. *Trouver la hauteur d'un objet perpendiculaire à l'horiſon, & acceſſible par ſon pied.*

Pl. 26. Fig. 1. Soit, par exemple, comme dans le problême du N. 268, une tour X acceſſible par ſon pied A. Ayant choiſi une baſe A B, mis l'inſtrument ou le demi-cercle C dans une ſituation verticale & ſon diametre parallele à l'horiſon, meſuré l'angle D C E, & la baſe D C qui eſt égale à A B, on aura le triangle rectangle E D C, dans lequel connoiſſant la baſe & un angle aigu, on trouvera le côté E D par cette analogie :

Comme le ſinus de l'angle E eſt à ſon côté oppoſé DC:
* N°. 1261. *Ainſi celui de D C E eſt au côté D E* *.

Ou bien prenant D C pour ſinus total,

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle E C D,
* N°. 1254. *comme le côté D C eſt au côté D E* *,

D E étant déterminé par l'une ou l'autre de ces analogies, on lui ajoutera A D, & l'on aura la hauteur demandée A E.

SIXIE'ME PROBLEME.

1322. *Trouver la longueur d'une ligne inclinée à l'horiſon.*

Pl. 26. Fig. 2. Soit la ligne A B inclinée à l'horiſon, acceſſible par ſon pied B, qu'il faut meſurer.

Ayant fait les opérations preſcrites dans le même problême N. 276, c'eſt-à-dire, choiſi une baſe C D, meſuré cette baſe & les angles A E F, & E F A, on déterminera le côté E A par cette analogie :

Le ſinus de l'angle E A F eſt à ſon côté oppoſé E F, comme celui du ſupplément de E F A eſt à E A *.

* N. 1257.

Le côté E A étant ainſi connu, & l'angle A E F ou A E G, on meſurera exactement E G, & l'on aura le triangle A E G dans lequel on connoîtra deux côtés, & l'angle compris; c'eſt pourquoi on viendra à la connoiſſance de A G par le problême du N. 1271. Ajoutant B G & A G, on aura la hauteur inclinée A B qu'il falloit meſurer.

SEPTIE'ME PROBLEME.

1323. *Trouver la hauteur d'un objet entiérement inacceſſible & perpendiculaire à l'horiſon.*

Soit, par exemple, le dôme X dont on veut avoir la hauteur, c'eſt-à-dire, la perpendiculaire A B abbaiſſée du ſommet A ſur le plan de ſa baſe. Pl. 26. Fig. 3.

On opérera d'abord, comme on l'a expliqué dans le problême du N. 272. qui eſt le même que celui-ci, c'eſt-à-dire, qu'on choiſira une baſe C D dans un lieu uni, des extrémités C & D de laquelle on puiſſe appercevoir le point A; & ayant meſuré les angles A E F, E F A, & la baſe E F qui eſt égale à C D, on viendra à la connoiſſance de E A par cette analogie:

Le ſinus de l'angle A eſt à ſon côté oppoſé E F, comme le ſinus de F eſt à E A.

E A étant connu, on imaginera la ligne E F prolongée juſqu'à la rencontre de la perpendiculaire A B dans le point G; on aura alors le triangle rectangle E G A, dont le côté E A ſera connu, de même que l'angle aigu A E G qui eſt le ſupplément de A E F,

lequel triangle donnera cette analogie, en prenant E A pour ſinus total.

Le ſinus total eſt au ſinus de l'angle A E G, comme le côté E A eſt à A G.*

* N°. 1255.

La ligne A G étant ainſi connue, ſi on ſuppoſe que le dôme ſoit ſur le même plan ou dans le même niveau que la baſe C D, on aura G B égale à la hauteur C E ou D F du demi-cercle; c'eſt pourquoi ajoutant à G A, C E ou D F, on aura la hauteur du dôme X ſur le plan D C B.

REMARQUES.

I.

1324. Il eſt évident qu'on peut par ce même problême trouver la valeur de E G ou C B, c'eſt-à-dire, la diſtance du point de ſtation C au point B où la perpendiculaire A B rencontre le plan D C prolongé; car le même triangle rectangle E G A donne auſſi

Le ſinus total eſt au ſinus de l'angle E A G, comme E A eſt à E G ou C B.

II.

1325. On peut encore par ce problême déterminer la hauteur d'un édifice, ſitué ſur une montagne, comme celle d'une tour T.

Pl. 26. Fig. 4.

Pour cela, on trouvera d'abord la hauteur L B de la tour & de la montagne; enſuite celle de la montagne qui eſt A B, & retranchant A B de L B, le reſte L A ſera la hauteur de la tour.

III.

1326. On a obſervé N. 272 & ſuivans, qu'il falloit que la baſe C D fût priſe dans un terrain uni,

& que ce problême ne donnoit la hauteur A B ou L B qu'au deſſus du plan de la baſe C D : Mais ſi l'on voit le pied de l'objet, il pourra donner auſſi la hauteur entiere.

Soit pour cet effet l'objet inacceſſible A B dont on a déterminé la hauteur A G, c'eſt-à-dire, celle qui ſe trouve au-deſſus du plan des deux poſitions E & F du demi-cercle. Ayant déterminé F G par le calcul & meſuré l'angle G F B on aura le triangle rectangle F G B dont le côté G B ſera trouvé par cette analogie, en prenant F G pour ſinus total : Pl. 26. Fig. 5.

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle G F B, comme le côté F G eſt à G B *. *N°. 1254.

G B étant ainſi connue par le moyen de cette regle, on l'ajoutera à A G, & l'on aura la hauteur total A B de l'objet propoſé.

I V.

1327. Il eſt évident que dans toutes les opérations précedentes, on a ſuppoſé que les points C & D de la baſe étoient de niveau, & que la hauteur de l'inſtrument dans chaque ſtation étoit la même au-deſſus du plan de la baſe, c'eſt-à-dire, que C E eſt égal à D F. On va examiner dans cette remarque ce que la difference des hauteurs de l'inſtrument peut cauſer d'erreur dans la détermination de la hauteur de l'objet, & donner le moyen de la corriger.

Soit ſuppoſé, par exemple, que dans la ſtation en D, le demi-cercle I ſoit plus élevé qu'en E. Fig. 6.

On menera par E l'horiſontale E G qui n'eſt que le prolongement du diametre de l'inſtrument qu'on ſuppoſe poſé parallelement à l'horiſon ; elle coupera D I en F : on menera par I l'horiſontal L H, qui ſera

parallele à E G; & par I & A, la ligne I A : on tirera enſuite F A qui coupera I H en M.

Cela poſé, à cauſe des paralleles E G & L H, l'angle extérieur A M L eſt égal à ſon oppoſé intérieur
Nº. 153. A F E : mais à cauſe du triangle A M I, l'angle A I L eſt égal aux deux oppoſés intérieurs I M A,
Nº. 228. I A M : Donc A I L eſt plus grand que A M L de l'angle I A M : Donc A F E qui eſt égal à I M A. eſt auſſi plus petit que L I A du même angle I A M; c'eſt pourquoi en ſuppoſant dans le calcul que A I L eſt égal à A F E, il s'enſuit néceſſairement de l'erreur dans la détermination de A B. Elle n'eſt pas conſidérable ſi l'excès de I D ſur C E n'eſt que de deux ou 3 pieds; car alors l'angle I A F oppoſé à un auſſi petit côté I F devient d'une quantité inſenſible; mais pour corriger cette erreur dans tous les cas de cette eſpece,

Il faut du point L ou L H coupe E A, imaginer la perpendiculaire L N ſur E G qui ſera égale à l'excès I F, ou à la difference des deux élévations de l'inſtrument dans les poſitions C & D.

L'angle L E N étant connu dans le triangle rectangle L N E, de même que L N, on viendra à la connoiſſance de E N, laquelle étant retranchée de E F donnera L I dont les points L & I ſont dans le même niveau apparent; & alors comme le triangle A L I ſe trouve déterminé, c'eſt-à-dire, qu'on connoît ſa baſe L I, l'angle A L I (qui à cauſe des paralleles E F & L I eſt égal à A E F) & l'angle L I A meſuré en I, on viendra par le calcul de ce triangle à la connoiſſance de I A, & enſuite par le moyen du triangle rectangle I H A à celle du côté H A, auquel côté ajoutant I D, on aura la hauteur A B. Ce qui eſt évident.

Si on ſuppoſe à préſent que le demi-cercle ſoit plus

plus élevé en E ſur la baſe C D qu'en F, on imaginera la parallele E G, & de même par F la ligne L H auſſi parallele à C D qui rencontrera E A prolongée en L; on imaginera auſſi que D F eſt prolongée juſqu'à la rencontre de E G en I. Si enſuite on tire par I & par F au point A les lignes I A, F A, on aura l'angle L F A meſuré dans la poſition D F de l'inſtrument, plus petit que ſon correſpondant E I A formé avec E I ſur la ligne du niveau apparent du diametre du demi-cercle placé en E.

Car à cauſe des paralleles E G, L H, l'angle E M A eſt égal à L F A *; Mais E I A eſt égal aux deux angles intérieurs I M A & M A I du triangle I A M *: Donc il eſt plus grand que I M A de l'angle M A I: Donc il eſt auſſi plus grand que L F A de la même quantité; c'eſt pourquoi ſi l'on prend l'angle L F A pour E I A; il eſt évident que le point A ne ſera pas déterminé exactement.

* N. 153.
* N°. 322.

Pour corriger l'erreur qui réſulte de l'inégalité des élévations differentes E & F, il faut imaginer que du point E on a mené ſur L H la perpendiculaire E N; on aura alors le triangle rectangle L N E dans lequel on connoîtra l'angle E L N qui eſt égal à A E G, de plus le côté E N qui eſt la difference ou l'excès de l'élévation de l'inſtrument en E ſur celle de F. On pourra donc venir à la connoiſſance du côté L N, lequel étant connu, on l'ajoutera à la baſe C D ou à ſon égale N F, ce qui donnera les deux points L & F de L F dans le même niveau apparent, & le triangle L F A dont les angles de la baſe ſont les deux angles obſervés en E & en F. On déterminera par ſon moyen F A, & par F A, A H, à laquelle ajoutant la plus petite élévation D F du demi-cercle, laquelle eſt égale à B H, on aura la hauteur inacceſſible A B.

V.

1328. Il ſuit des obſervations de la précedente remarque que pour déterminer la hauteur d'une ligne inacceſſible avec quelque exactitude, il faut, ſi le terrain n'eſt pas ſenſiblement de niveau, connoître la difference du niveau des extrémités de la baſe; trouver enſuite ce qu'il faut retrancher de ſa meſure, ſi le graphometre eſt plus élevé en D ou dans ſa poſition la plus proche de A B, qu'en C, afin d'avoir le triangle L I A qui ait pour les angles de ſa baſe, les deux angles meſurés en C & en F, ou ce qu'il faut ajouter à cette baſe, pour le même ſujet, ſi le graphometre a été plus élevé en E qu'en F. Il eſt clair auſſi que dans le premier cas, il faut ajouter à la ligne A H que donne le calcul du triangle A I H, la plus grande élévation D I de l'inſtrument, laquelle eſt égale à B H; & que dans le ſecond, il faut ajouter à A H la plus petite élévation D F de l'inſtrument. Tout cela eſt évident par les obſervations précedentes, & par l'inſpection des figures 6 & 7 de la planche 26.

Pl. 26. Fig. 6. & 7.

HUITIE'ME PROBLEME.

1329. *Trouver la hauteur d'un triangle ſcalene dont les trois côtés ſont connus.*

Soit le triangle ſcalene A C B dont les côtés ſont connus, on demande la hauteur de ce triangle.

Fig. 8.

Soit ſuppoſé A B le plus grand côté. On imaginera la perpendiculaire C D tirée de C ſur A B : on cherchera enſuite par le ptoblême du N. 1271. la difference des deux parties de la baſe coupée par cette perpendiculaire. On aura enſuite le triangle rectangle A D C, dans leſquels on connoîtra deux côtés

CA & AD, par le moyen desquels on trouvera l'angle CAD par cette analogie :

*AD est à AC, comme le sinus total est à la sécante de l'angle A**. *N°. 1253

L'angle A étant connu, on fera cette seconde analogie pour avoir CD :

*Le sinus total est à la tangente de l'angle A, comme le côté AD est à CD**. *N°. 1254.

REMARQUE.

1330. Il est évident que par ce problême on peut trouver la surface d'un triangle dont les trois côtés sont donnés ; car elle est le produit de la base par la moitié de la hauteur * : Or la base est connue, puisque les trois côtés du triangle sont donnés ; le problême précedent fait trouver la hauteur : Donc, &c. *N°. 451.

NEUVIE'ME PROBLEME.

1331. *Le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle étant donné, trouver le rayon du cercle, ou ce qui est la même chose, son rayon oblique.*

Soit, par exemple, le côté AB d'un octogone, donné de 180 toises, il s'agit de trouver le rayon du cercle dans lequel ce polygone est inscrit. Pl. 26. Fig. 9.

Soit tiré du centre C les rayons CA & CB, il faut trouver d'abord l'angle du centre ACB de ce polygone. Pour cela, on divisera 360 degrés par 8, & l'on aura 45 degrés *. Otant ce nombre de 180 degrés, il restera 135 pour l'angle de la circonference du même polygone, dont la moitié 67 degrés 30 minutes sera la valeur de chacun des demi-angles de la circonference CAB & CBA. *N°. 316.

Ainſi l'on a préſentement le triangle C A B dans lequel on connoît un côté & les angles ; c'eſt pourquoi l'on viendra à la connoiſſance de A C ou C B par cette analogie :

Le ſinus de l'angle C de 45 degrés eſt à ſon côté oppoſé A B de 180 toiſes, comme le ſinus de l'angle A de 67 degrés 30 minutes eſt au côté oppoſé C B :

Ou bien en prenant les ſinus de ces angles,

70710. 180 : : 92387. C B.

Faiſant la Regle on trouvera 234 toiſes 5 pieds 7 pouces pour la valeur du rayon C B.

On trouvera de même le rayon oblique de tous les autres polygones réguliers.

REMARQUE.

1332. Si l'on veut connoître le rayon droit du même polygone, on imaginera la perpendiculaire C D tirée du centre C ſur A B ; elle coupera ce côté en deux également ; c'eſt pourquoi comme A B eſt ſuppoſé de 180 toiſes, A D ſera de 90, & l'on aura le triangle rectangle A D C qui donnera cette analogie en prenant A D pour ſinus total :

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle A, comme A D eſt à D C.

Faiſant l'opération, on aura le rayon droit D C.

On trouvera de la même maniere le rayon droit de tous les autres polygones réguliers.

DIXIE'ME PROBLEME.

1333. *Le rayon d'un cercle étant donné, trouver le côté d'un polygone régulier inſcrit dans ce cercle, par exemple, celui d'un pentagone.*

Soit AB le côté d'un pentagone inſcrit dans le cercle X, & le rayon AC donné, par exemple, de 152 toiſes 3 pieds. Il s'agit de trouver la valeur du côté AB. Pl. 27. Fig. 1.

On cherchera, comme dans le problême précedent, l'angle du centre ACB & le demi-angle de la circonference CAB ou CBA de ce polygone; ſçavoir ACB de 72 degrés, & CAB ou CBA de 54: on trouvera enſuite AB par cette analogie :

Comme le ſinus de CAB eſt à ſon côté oppoſé CB; ainſi le ſinus de C eſt à AB :

Ou bien prenant les ſinus de ces angles, & la valeur du rayon CB,

80901 . 152 toiſes 3 pieds :: 95105 . AB.

Faiſant l'opération, on trouvera pour la valeur de AB, 179 toiſes 1 pied 7 pouces.

REMARQUE.

1334. Il eſt évident qu'on peut connoître par le moyen du rayon oblique d'un polygone régulier, la valeur du rayon droit CD.

Car comme ce rayon eſt perpendiculaire ſur le côté, l'on aura, en prenant le rayon oblique, AC pour ſinus total.

Le ſinus total eſt au ſinus de l'angle A, comme AC eſt au rayon droit CD.

ONZIE'ME PROBLEME.

1335. *Trouver la ſuperficie d'un lac ou d'un terrain dans lequel on ne peut entrer; mais dont toute la circonference eſt acceſſible.*

Pl. 27. Fig. 2. Soit le lac ou le terrain A B C D E, dans lequel on ne peut entrer, & dont on veut meſurer la ſuperficie.

On imaginera les diagonales A D & B D, qui le partageront en triangles. On trouvera la valeur de toutes ces diagonales par la Trigonometrie. Par exemple, pour trouver A D, on meſurera E A, & les angles E A D, A E D, & l'on aura enſuite D A par le problême du N. 1268, ou 1269.

On trouvera de la même maniere la valeur de toutes les autres diagonales; & comme tous les côtés de la circonference du lac peuvent ſe meſurer, on aura tout le lac partagé en triangles, dont les trois côtés ſont connus. On trouvera par le problême huitiéme de cet article N. 1329. la hauteur de tous ces triangles, & multipliant la baſe de chacun par la hauteur, additionnant enſuite tous les differens produits qui en réſulteront, il eſt évident qu'ils donneront la ſuperficie du lac ou du terrain propoſé.

DOUZIE'ME PROBLEME.

1336. *Trouver par les Tables des Sinus le rapport de la circonférence du cercle & de ſon diametre.*

Il faut chercher le ſinus d'une minute, qui eſt 2909, en prenant tous les chiffres qui l'expriment; ce ſinus differe très-peu de l'arc d'une minute, car les Tables donnent la tangente de ſon arc de la même valeur, & ſa ſecante eſt égale au rayon: D'où il ſuit que l'extrémité ſuperieure du ſinus d'une minute ſe confond avec l'extrémité du rayon & de la tangente du même arc, & que l'autre extrémité ſe confond auſſi avec le commencement de la tangente, c'eſt-à-dire, avec l'autre extrémité de l'arc; ce qui fait voir que le ſinus d'une minute peut être regardé

comme la corde de l'arc d'une minute, ou comme l'arc de la minute, à cauſe qu'un auſſi petit arc ne differe pas ſenſiblement d'une ligne droite.

Multipliant donc 360 dégrés par 60, on aura le nombre des minutes de la circonférence du cercle, 21600, qui étant multipliées par 2909, ou par la valeur d'une minute en parties de ſinus ou du rayon, donnera 62834400 des mêmes parties pour la circonférence du cercle : ainſi la circonférence ſera à ſon diametre comme 62834400 eſt au double du rayon ou à 20000000, ou comme 628344 eſt à 200000.

Ce rapport, dont il ſeroit embaraſſant de ſe ſervir dans la pratique, ne differe gueres de celui d'*Archimede*, c'eſt-à-dire, de celui de 22 à 7. Car mettant ces deux rapports en fractions & leur donnant un même dénominateur, on aura pour le premier $\frac{4398408}{14000000}$, & pour celui de 22 à 7 ou $\frac{22}{7}$, $\frac{4400000}{14000000}$, qui ne differe du premier que de $\frac{1592}{14000000}$ ou de $\frac{1}{8750}$ en réduiſant cette derniere fraction à ſes moindres termes : c'eſt pourquoi on peut le regarder comme ſenſiblement égal au rapport de 628344 à 200000, & le lui ſubſtituer dans la pratique pour abréger l'opération.

TREIZIE'ME PROBLEME.

1337. *Calculer un front de fortification conſtruit ſelon le ſyſtême de M. le Maréchal de Vauban.*

Ce Problême conſiſte à trouver par la trigonométrie la valeur des lignes & des angles de la fortification (*a*).

(*a*) On ſuppoſe que ceux qui voudront réſoudre ce Problême, auront étudié la Fortification, qu'ils en ſçauront les termes, & la conſtruction des principaux Ouvrages.

Soit AB un front de fortification, par exemple, celui d'un exagone, conſtruit comme il eſt enſeigné dans nos *Elémens de Fortification.*

Fig. 27. Fig. 3. On aura le côté AB de 180 toiſes, & par conſéquent ſa moitié AC de 90 toiſes, la perpendiculaire KD de 30, & les faces AE, BF de 50 toiſes.

A l'égard des angles, comme le polygone eſt donné & qu'il eſt régulier, on connoîtra celui du centre ACB, & les demi-angles de la circonférence CAB & CBA.

Toutes ces choſes étant données, il faut par leur moyen trouver la valeur des autres; & commencer par déterminer la valeur de l'angle diminué EAB ou DAB.

Le triangle AKD étant rectangle, & ſes côtés AC & CD étant connus, ſçavoir, AK de 90 toiſes, & la perpendiculaire KD de 30, on aura l'angle KAD par cette analogie:

AK eſt à KD, comme le ſinus total eſt à la tangente de KAD:

Ou bien: 90. 30 :: 100000. x. (On ſuppoſe que x repréſente la tangente cherchée.) Faiſant la Regle on aura 33333 pour la valeur de x; & cherchant dans les Tables des Sinus une tangente de cette quantité, ou la plus approchante 33330, on trouvera qu'elle répond à un angle de 18 dégrés 26 minutes: ainſi l'angle diminué DAK eſt de cette valeur.

Préſentement il faut tirer EF, qui ſera parallele à AB, & qui par cette raiſon donnera l'angle exterieur HEF égal au diminué DAK; & pour connoître EF ou ſon égal EH, il faut ſçavoir quelle eſt la valeur de AN, ou de la partie du côté extérieur compriſe entre l'angle flanqué A & la perpendiculaire

EN abbaiſſée du ſommet E de l'angle de l'épaule ſur AB.

Cette perpendiculaire EN donne le triangle rectangle ANE, dans lequel l'hypoténuſe AE eſt connue de 50 toiſes, & l'angle EAN de 18 dégrés 26 minutes : C'eſt pourquoi on viendra à la connoiſſance de AN par cette analogie :

Comme le ſinus total eſt au ſinus de AEN complement de EAN, ainſi AE eſt AN ;

Ou bien,

100000. 94869 :: 50. AN.

Faiſant la Regle, on trouvera pour la valeur de AN 47 toiſes 2 pieds.

De AK qui vaut 90 toiſes, on ôtera AN, & il reſtera pour NK 42 toiſes 4 pieds. Or NK eſt égale à EM, qui eſt la moitié de EF : Donc EF ou ſon égale EH, vaut 85 toiſes 2 pieds.

On ajoutera EH à AE, & l'on aura 135 toiſes 2 pieds pour la longueur de la ligne de défenſe AH.

Maintenant l'on a le triangle iſoſcelle FEH, dans lequel connoiſſant les deux côtés égaux & l'angle FEH, oppoſé au flanc HF, on viendra à la connoiſſance de ce flanc par cette analogie :

Le ſinus EHF (qui eſt la moitié du ſupplément de HEF) *eſt au côté oppoſé EF, comme le ſinus de HEF eſt à HF :*

Ou bien en mettant dans cette proportion les valeurs de ces ſinus, & à la place de EF ſa valeur,

98708. 85 toiſes. 2 pieds. :: 31620. HF.

Cette Regle donnera le flanc HF de 27 toiſes 2 pieds.

Comme l'angle EHF eſt la moitié du ſupplément de HEF, qui eſt de 18 dégrés 26 minutes, & que ce ſupplément eſt par conſéquent de 161 dégrés 34 minutes, il s'enſuit que EHF eſt de 80 dégrés 47 minutes, ainſi qu'on a dû le déterminer dans l'analogie précédente. Or comme la courtine eſt parallele à AB ou à EF, l'angle AHG & l'angle diminué HAB ſont égaux, parce qu'ils ſont alternes : C'eſt pourquoi ajoutant la valeur de l'angle diminué à AHF, on aura l'angle du flanc GHF de 99 dégrés 13 minutes.

On déterminera maintenant l'angle de l'épaule HFB, en conſiderant que dans le triangle GHF on connoît les angles FHG, HGF, ce dernier étant égal à l'angle diminué ; ainſi ôtant la ſomme de ces deux angles qui eſt 117 dégrés 39 minutes, de 180 dégrés, il reſtera 62 dégrés 21 minutes pour le troiſiéme GFH; Mais l'angle HFB en eſt le ſupplément : Il eſt donc de la même valeur que les deux précédens, c'eſt-à-dire, de 117 dégrés 39 minutes.

Pour la courtine GH, comme elle fait partie du triangle GHF, dans lequel on connoît les angles & deux côtés, ſa valeur ſera déterminée par cette analogie :

Le ſinus de l'angle FGH eſt au côté oppoſé HF, comme le ſinus de GFH eſt à GH:

Ou bien, en prenant la valeur de ces ſinus & celle du flanc HF,

31620. 27 toiſes 2 pieds :: 88579. GH.

Faiſant l'opération de cette Regle, on aura 76 toiſes 3 pieds pour la valeur de GH ou de la courtine du front AB.

Si l'on veut connoître l'angle flanquant ADB, il faut conſiderer qu'il eſt coupé en deux également par la perpendiculaire DK, & que ſa moitié ADK étant le complement de l'angle diminué DAK, eſt de 71 dégrés 34 minutes; qu'ainſi cet angle eſt de 143 dégrés 8 minutes.

A l'égard de l'angle flanqué, on le connoîtra en ôtant de la moitié de l'angle de la circonférence du polygone CAB, l'angle diminué EAN; le reſte donnera la moitié de l'angle flanqué, & par conſéquent en le doublant, on aura cet angle entier.

Ainſi le front ou le côté AB étant ſuppoſé appartenir à un exagone dont l'angle de la circonférence eſt de 120 dégrés *, ſa moitié CAB ſera de 60 dégrés, de laquelle retranchant l'angle diminué EAN de 18 dégrés 26 minutes, il reſtera pour CAE 41 dégrés 34 minutes : Donc l'angle flanqué qui en eſt le double, eſt de 83 dégrés 8 minutes. * N°. 336.

Il reſte préſentement dans le front AB a déterminer la valeur de la demi-gorge GI, & celle la capitale AI.

Pour cela il faut conſiderer le triangle AIH, dans lequel AH, qui eſt la ligne de défenſe, eſt connue de 135 toiſes 2 pieds; les angles A & H le ſont auſſi également, de même que AIH, qui eſt le ſupplément de la moitié de l'angle de la circonférence, ou de CIG qui eſt de 60 dégrés dans cet exemple : Ainſi AIG ſera de 120 dégrés; c'eſt pourquoi l'on aura :

Le ſinus du ſupplément de AIH (qui eſt celui de 60 dégrés) *eſt au côté AH oppoſé à cet angle* *, *comme le ſinus du demi-angle flanqué IAH*, (qui eſt de 41 dégrés 34 minutes) *eſt au côté oppoſé IH:* * N. 1257.

Ou bien en mettant la valeur de ces ſinus, priſe dans les Tables, & celle de AH,

86602. 135 toiſes 2 pieds :: 66349. IH.

On trouvera en faiſant cette Regle IH de 103 toiſes 4 pieds; & ôtant de cette ligne la courtine GH de 76 toiſes 3 pieds, il reſtera pour la demie-gorge IG 27 toiſes 1 pied; ce qui fait voir qu'elle eſt ſenſiblement égale au flanc.

Si l'on ajoute à IH la demie-gorge HL, qui eſt égale à IG, on aura le côté intérieur IL de 130 toiſes 5 pieds.

Enfin pour déterminer la capitale IA, le même triangle AIH donnera :

Le ſinus du ſupplément de AIH eſt au côté AH oppoſé à cet angle, comme le ſinus de IHA eſt à AI:

C'eſt-à-dire, en mettant dans cette analogie la valeur de IH & celle des ſinus,

86602. 135 toiſes 2 pieds :: 31620. AI.

On trouvera en faiſant la Regle, AI de 49 toiſes 2 pieds.

Otant enſuite du rayon exterieur AC (qui dans cet exemple eſt égal à AB, parce que le polygone eſt un exagone, & qui par conſéquent vaut 180 toiſes) la valeur de la capitale AI, il reſtera pour le rayon interieur IC 130 toiſes 4 pieds.

Si l'on veut connoître la diſtance du côté exterieur AB à la courtine GH, on prolongera la perpendiculaire KD en O; & comme KD eſt connue, il ne s'agira plus que de trouver la valeur de DO.

Pour cela, comme KO coupe la courtine en deux également, OH ſera connu; l'angle OHD qui eſt

égal à l'angle diminué, le ſera également; & le triangle rectangle D O H donnera, en prenant H O pour ſinus total :

Le ſinus total eſt à la tangente de l'angle OHD, comme OH eſt OD :

Ou bien,

100000. 33330 :: 38 toiſ. 1 pieds 6 pouc. OD.

On trouvera cette ligne O D de 12 toiſes 4 pieds 5 pouces; ainſi ajoutant cette valeur à K D, qui vaut 30 toiſes, on aura 42 toiſes 4 pieds 5 pouces pour K O, ou pour la diſtance du côté exterieur A B à l'interieur I L.

REMARQUE.

On calculera de la même maniere les fronts des autres polygones, comme auſſi ceux des ouvrages à corne & à couronne; car la perpendiculaire étant ordinairement dans ces fronts la ſeptiéme ou la ſixiéme partie du côté exterieur de l'ouvrage, & les faces les deux ſeptiémes du même côté, on aura par-là les lignes néceſſaires à la détermination de toutes les autres du front propoſé.

QUATORZIE'ME PROBLEME.

1338. *Trouver par la Trigonométrie la face, la capitale & la demi-gorge d'une demi-lune.*

Soit le front de Fortification A B, vis-à-vis la courtine duquel on a conſtruit le foſſé & la demi-lune K, conformément à ce qui eſt preſcrit dans nos Elémens de Fortification. Il s'agit de déterminer la face S R, la capitale T R, & la demi-gorge S T. Pl. 17. Fig. 4.

Pour cela on prolongera la face QA en Z. AZ eſt ſuppoſé de 20 toiſes par la conſtruction. On tirera par Z & par l'angle de l'épaule E la ligne ZE, & l'on aura le triangle ZAE, dans lequel on connoîtra AZ & AE qui eſt la face du Baſtion; l'angle compris ZAE eſt le ſupplément du flanqué QAE; donc il ſera auſſi connu. On pourra donc par le Problême du N. 1271, trouver la valeur de l'angle AEZ & le côté ZE oppoſé à l'angle compris ZAE.

Les trois angles de ſuite AEZ, ZEF & FEH, valent deux droits : le premier & le dernier ſont connus; car le premier vient de l'être, ou peut l'être par la réſolution du triangle AEZ; FEH eſt l'angle diminué : Donc ôtant de 180 dégrés la valeur de ces deux angles, il reſtera celle de ZEF.

Maintenant on a le triangle ZEF, dont les deux côtés ZE & EF ſont connus; car FE eſt égale à EH, qui a été déterminé dans le douziéme Problême; l'angle compris ZEF eſt auſſi connu : Donc on viendra par le Problême du N. 1271, à la connoiſſance des angles de la baſe de ce triangle, ſçavoir, Z & ZFE.

On aura après cela le triangle rectangle TXF, dans lequel XF, qui eſt la moitié de EF ou EH, eſt connu, de même que l'angle TEX, & par conſéquent ſon complement XTF; ainſi on pourra venir à la connoiſſance de TF.

Conſiderant enſuite le triangle TFD, dans lequel les angles ſont connus & le côté TF, on viendra aiſément à la connoiſſance de DT, à laquelle ajoutant OD, qui eſt connu par le précédent Problême, on aura la valeur de OT, laquelle étant ôtée de OR, donnera la capitale TR; mais pour cela il faut avoir OR.

Dans le triangle rectangle ROH, OH qui eſt la moitié de la courtine eſt connu, de même que RH, qui par la conſtruction eſt égale à VD : C'eſt pourquoi on trouvera d'abord les angles aigus de ce triangle par cette analogie, en prenant OH pour ſinus total :

OH eſt à RH, comme le ſinus total eſt à la ſécante de l'angle OHR.

Cet angle OHR étant connu, on viendra à la connoiſſance de OR par cette autre analogie :

Comme le ſinus total eſt au côté RH, de même le ſinus de RHO eſt à OR.

On ôtera enſuite de OR la ligne OT, & l'on aura ainſi la capitale TR.

Pour trouver SR & ST, il faut conſiderer que ſi de l'angle OHR on ôte OHD, qui eſt égal à l'angle diminué, il reſtera DHR ou VHR. Or, comme le triangle RHV eſt iſoſcelle, chacun des angles oppoſés à H eſt la moitié du ſupplément de cet angle ; c'eſt pourquoi HRV ſera connu. Otant de cet angle HRO, qui eſt le complement de OHR, il reſtera l'angle TRS. Or dans le triangle RTS, l'angle RTS eſt égal à XTF, qui eſt connu par les réſolutions précédentes : Ainſi on connoît actuellement dans le triangle RTS la baſe RT & les angles de cette baſe. On viendra donc aiſément à la connoiſſance des deux autres côtés, c'eſt-à-dire, de la face SR & de la demi-gorge ST, par le Problême du N. 1268.

On n'en dira pas davantage ſur cette eſpece de Calcul. Ceux qui auront bien compris ce que l'on en

a dit dans les deux derniers Problêmes, ſeront en état de calculer eux-mêmes les autres parties de la Fortification, comme la longueur de la contreſcarpe, ſon arrondiſſement, les flancs concaves, les orillons, & ils pourront auſſi calculer les fronts des Syſtêmes des différens Auteurs qui ont écrit ſur la Fortification.

FIN.

56N
608789
Biblioteca Nazionale V. E. III. NAPOLI

SUPPLEMENT

A l'*Errata* du premier Volume de L'ARITHMETIQUE & LA GEOMETRIE DE L'OFFICIER.

PAge 65 dans le premier exemple de la Diviſion, marquez le diviſeur 4 ſous le dernier chiffre 2 du dividende, à côté du reſte 1, de la ſeconde operation de cette diviſion.

Page 77 dans la Preuve du dernier exemple de cette page, mettez 1200 pour multiplicateur à la place de 2000.

Page 105, ligne 9, ſon dénominateur 3 par 2, *liſ.* ſon dénominateur 3 par 3.

Page 112, lig. 10, $\frac{5}{4}$, *liſ.* $\frac{3}{4}$.

Page 114. lig. 20. $\frac{13}{113}$, *liſ.* $\frac{13}{60}$. *Au quotient de la diviſion de la même page, au lieu de* $2\frac{13}{113}$, *écrivez* $2\frac{13}{60}$.

Page 132. lig. 3. en comptant par le bas, $\frac{3}{7}$, *écrivez* $\frac{2}{3}$.

Page 135. lig. 8. par le bas, le premier terme 12, *écrivez* le premier terme 3. *Et dans la même page, lig. 6, en comptant auſſi par le bas, au lieu de* nombre 12. *écriv.* nombre 3.

Page 157. lig. ſeconde de l'Addition des differens prix des choſes à mêlanger, *au lieu de* 4474, *écriv.* 4475. *Dans la ſomme de ces prix, mettez* 17507 *à la place de* 17506.

Dans la même page 157. lig. 6. par le bas, au lieu de 17506, *écriv.* 17507, *& au lieu du prix commun ou moyen, lig. 4. par le bas, qui eſt* 10tt-13ſ-8 den. $\frac{268}{873}$, *écriv.* 10tt-13ſ-9$\frac{5}{39}$.

Page 249. N. 143. d'un point donné C. *écrivez* d'un point donné D.

Page 297. lig. 8. l'angle G F B, *lis.* l'angle G F H.

Page 302. lig. 6. g h, lis. i h.

Page 311. lig. 14. B E C, *écriv.* B E D.

Page 357. lig. 9. C D, *écriv.* C P.

Page 365. dans la Multiplication de cette page, au lieu de pour 1 pouce, *écriv.* pour 4 pouces.

Page 370. lig. 8. par le bas, d'un pouce ou de deux pouces, *lis.* d'un pied ou de deux pieds.

Page 390. au lieu de 375, *marqués pour la moitié du produit* 770 toiſes *de la premiere Multiplication, écriv.* 385 toiſes.

Ibid. lig. 7. en comptant par le bas, 375, *écriv.* 385.

Ibid. lig. 5. encore par le bas, au lieu de 154, *écriv.* 164.

---

*Supplément à l'*Errata *du Tome II.*

PAGE 11. lig. 6. du quatriéme exemple, au lieu de 242 qui ſe trouve poſé ſous 0.900, *écriv.* 422, *mais poſez le 4 ſous le 9 & 22 ſous les deux zero qui ſont à la droite de 9.*

Page 11. dans la pénultiéme ligne du 4. exemple, au lieu de 2442, écriv. 4241.

Page 59. lig. 17. de 3 à 9 & de 4 à 12, *écriv.* de 5 à 4 & de 9 à 12.

Ibid. lig. 18. de 9 à 12, *écriv.* de 4 à 12.

Page 76. lig. pénultiéme, ſous double & ſous triple, *écriv.* ſous doublées & ſous triplées.

Page 155. ligne 3. par le bas, A D. C D : : C D. D C. *écriv.* A D. C D : : C D. B D.

Page 189. dans la 9. ligne de la Démonſtration du Théoreme de cette page, au lieu de c d, écriv. a c.

Page 244. lig. 22. du 13. Livre, *écriv. du* 12. Livre.

Page 253. lig. 4. par le bas, HL. OR :: OR. FG. *écriv.* HL. OR : OR. FG.

Page 258. lig. 3. par le bas, CEI, *écriv.* GEI.

Page 273. lig. 3. par le bas, B×E B, *écriv.* B×E F.

Page 327. lig. 13. en comptant par le bas, CF. CH : : CG. CL. *écriv.* CF. CH : : FG. HL.

Page 412. lig. 7. 99055, *écriv.* 99855.

Page 446. lig. 9. du ſupplément C, *écrivez* du ſupplément de l'angle C.

Livres qui ſe vendent chez le même Libraire.

Ouvrages de M. BELIDOR, *ancien Profeſſeur Royal de Mathématique, Colonel d'Infanterie, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, &c.*

NOuveau Cours de Mathématique à l'uſage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette ſcience à la théorie & à la pratique des differens ſujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre, *in*-4. avec 34 Planches, 15 l.

La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de Fortification & d'Architecture civile, *in*-4. grand papier, avec plus de 50 Planches. 24 l.

Architecture hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever & de ménager les eaux pour tous les beſoins de la vie. *Premiere Partie*, contenant les Machines hydrauliques & les Pompes, en deux volumes *in*-4. grand papier, enrichi de cent grandes Planches. 40 l.

On donnera au Public l'année prochaine la *ſeconde Partie* du même Ouvrage, &c. en deux gros Volumes *in*-4. grand papier.

Ouvrages de feu M. *l'Abbé* DEIDIER, *Profeſſeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fere.*

L'Arithmétique des Géométres, ou nouveaux Elemens de Mathématique, contenant l'Arithmétique & l'Algebre, *in*-4. 15 l.

La Science du Géometre, où l'on trouve la théorie & la prati-

que de la Géométrie mis à la portée de tout le monde, *in*-4. avec près de 50 Planches, 15 l.

La Meſure des Surfaces & des Solides par la connoiſſance des centres de graviré & par l'Arithmétique des Infinis, *in*-4. avec Figures, 12 l.

Le Calcul différentiel & le Calcul intégral expliqués & appliqués à la Géomerrie, *in*-4. avec Figures, 15 l.

Mécanique générale pour ſervir d'introduction aux Sciences Phyſico Mathématiques, *in*-4. avec Figures, 15 l.

Le parfait Ingenieur François. Nouvelle Edition augmentée, *in*-4 avec 50 Planches, 15 l.

Elemens généraux des parties des Mathematiques les plus néceſſaires à l'Artillerie & au Génie: en deux Volumes *in*-4. avec plus de 60 Planches, 24 l.

Traité de Perſpective théorique & pratique. Brochure *in*-4. 3 l. 10 ſ.

Ouvrages de M. OZANAM, de l'Academie des Sciences.

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre; ſçavoir, l'introduction aux Mathématiques, les Elemens d'Euclides, l'Arithmétique, la Trigonometrie rectiligne & ſpherique, les Tables des Sinus & des Logarithmes, la Géomerrie théorique & pratique, la Fortification réguliere & irréguliere, la Mécanique, la Perſpective, la Géographie & Coſmographie & la Gnomonique, en cinq Volumes *in*-8. avec plus de 200 Planches, 40 l.

Les Récréations Mathématiques & Phyſiques. Nouvelle édition, en 4 Volumes *in*-8. avec beaucoup de Figures, 20 l.

Les Elemens d'Euclides du R. P. Deſchalles expliqués, avec l'uſage de chaque propoſition. Nouvelle édition corrigée par M. Audierne, *in*-12. avec Figures, 1746. 3 l.

Traité de l'Arpentage & du Toiſé, avec un nouveau Tarif du Toiſé des bois de charpente. Nouvelle édition augmentée, *in*-12. avec Figures, 1747. 3 l.

La Géometrie pratique, contenant la Trigonometrie, la Planimetrie & la Stéreomerrie, *in*-12. avec Figures, 2 l. 10 ſ.

Uſage du Compas de proportion & de l'Inſtrument univerſel, avec un Traité de la diviſion des champs. Nouvelle édition, avec Figures, 1748. 2 l. 10 ſ.

Méthode de lever les Plans & les Cartes de terre & de mer avec inſtrumens & ſans inſtrumens; *in*-12. avec Figures, 2 l.

Ouvrages de M. LE BLOND, Profeſſeur de Mathématiques des Pages du Roi.

L'Arithmérique & la Géometrie de l'Officier, contenant les élémens de ces deux Scienees appliquées aux differens beſoins de l'Homme de guerre, en deux Volumes *in*-8. enrichis de 45 Planches, 1748. 12 l.

Abregé d'Arithmétique & de Géometrie à l'uſage des jeunes Militaires, *in*-12. avec Figures, 1748. 3 l.

Elemens de Forrification, contenant ce qu'il y a de plus eſſentiel à obſerver dans une Place forte, pour initier avec facilité les jeunes Militaires dans l'étude de cette Scienee. Nouvelle édition augmentée, *in*-12. avec près de 20 Planches, 3 l.

Elemens de la guerre des Sieges à l'uſage des jeunes Militaires, contenant l'Artillerie, l'Attaque & la Deffenſe des Places, avec un petit Dictionnaire des termes, en trois Volumes *in*-8. avec quantité de Figures, 15 l.

Eſſai de Caſtrametation, ou de la maniere de former, de tracer & de meſurer les Camps, *in*-8. avec Figures, *ſous preſſe*.

Art Militaire.

Art de la Guerre par principes & par régles. Ouvrage de M. le Maréchal de Puyſegur, mis au jour par M. le Marquis de Puyſegur ſon fils, Brigadier d'Infanterie, Colonel du Régiment de Vexin, Volume *in-fol.* grand papier, en deux Parties, enrichi de Vignettes & de plus de 40 grandes Planches, 1748. 60 l.

—— Le même Ouvrage en deux Volumes *in* 8. *ſous preſſe*.

Mémoires hiſtoriques & militaires ſous le Regne de Louis XIII & ſous la minorité de Louis XIV, par Meſſire Jacques de Chaſtenet, Chevalier, Seigneur de Puyſegur, Colonel du Régiment de Piedmont. Avec des inſtructions militaires, en 2 Volumes *in*-12. Nouvelle édit. 1748. 5 l.

Sentimens d'un Homme de guerre ſur le Syſtême de M. le Chevalier de Follard, par rapport à la colonne & au mêlange des differentes armes d'une armée, *in*-4. avec Figures. *La Haye.*

Mémoires d'Artillerie de M. Surirey de Saint-Remy. Nouv. édition conſidérablement augmentée, avec une ample Table des Matieres, en trois Volumes, *in*-4. enrichis de Vignettes & de plus de deux cens Planches. 1745. 45 l.

Théorie nouvelle ſur le Mécaniſme de l'Artillerie, par M. Dulac, Officier d'Artillerie du Roi de Sardaigne, *in*-4. avec près de 40 Planches, 15 l.

Eſſay de l'application des forces centrales aux effets de la

poudre à canon, par M. Bigot de Morogues, *in*-8. 2 l. 10.

De l'Attaque & de la Deffenſe des Places, avec un Traité pratique des Mines, par M. le Maréchal de Vauban, & un Traité de la guerre en général. Nouvelle édition augmentée, en 2 Vol. *in*-8. avec plus de 50 Planches. *La Haye*, 12 l.

Traité des Feux d'artifice pour le Spectacle, par M. Frezier, Directeur des Fortifications de Bretagne. Nouvelle édition conſidérablement augmentée, *in*-8. avec Figures. 1747. 6 l.

Mémoires de M. Goulon, Généraliſſime des Armées de l'Empereur, ſur l'Attaque & la Deffenſe d'une Place; avec la Relation du Siege d'Atli, *in*-8. avec Figures. *La Haye*, 4 l. 10 ſ.

L'Ingenieur François, contenant la Géometrie pratique ſur le terrain, & la fortification ſuivant M. de Vauban, *in*-8. avec Figures. *Amſterdam*. 6 l.

Nouvelle maniere de fortifier l'Hexagone, ou Traité des Fortifications, par M. le Baron de Coëhorn, *in*-8. avec Figures. Nouvelle édition. *La Haye*. 6 l.

Les Regles du Deſſein & du Lavis pour les Plans, Elevations & Profils des édifices militaires, & pour les Cartes des environs d'une Place, par M. Buchotte. Nouvelle édition augmentée, avec un Supplément, *in*-8. rempli de Figures, 5 l.

Ouvrages de Mathématique & de Phyſique par differens Auteurs.

Chriſtiani WOLFII *Matheſeos univerſæ Elementa, in quinque Tomos in*-4. *Genevæ*. 60 l.

——*Compendium Elementorum Matheſeos univerſæ ad uſum ſtudioſæ Juventutis adornatum*, en 2 Volumes *in*-8. avec 44 Planches. *Genevæ*. 9 l.

Abregé du Cours de Mathematique de M. Chretien WOLF, traduit en François & mis à la portée de tout le monde, en 3 Volumes *in*-8. enrichis de 69 Planches. 1747. 15 l.

Traité de Géometrie théorique & pratique, à l'uſage des Artiſtes, par Seb. Le Clerc, nouvelle édition, enrichie de 45 Planches, *in*-8. 7 l.

Pratique de la Géometrie ſur le papier & ſur le terrain, par le même, *in*-12. avec plus de 80 Planches, 3 l.

Elemens de Phyſique-Mathematique confirmés par les expériences, ou Introduction à la Philoſophie de Newton, traduit du Latin de M. s'Graveſande par M. Roland de Virloys, en 2 Volumes *in*-8. avec 50 Planches, 12 l.

Principes du Syſtême des petits tourbillons mis à la portée de tout le monde, & appliqués aux Phenoménes les plus généraux,

avec une Diſſertation de M. Privat de Molieres ; par M. l'Abbé de Launay, *in*-12. 1747. 2 l. 10 ſ.

Aſtronomie Phyſique, ou Principes géneraux de la nature appliqués au Mécaniſme Aſtronomique, & comparés aux Principes de la Philoſophie de Newton, par M. de Gamaches, de l'Académie Royale des Sciences, *in*-4. avec Fig. 13 l. 10 ſ.

Recueil des Pieces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences, depuis leur fondation en 1720. juſqu'en 1732. & des Pieces qui y ont concouru, en 2 Volumes *in*-4. avec quantité de Figures.

Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1697. Par M. Varignon de l'Académie des Sciences, en deux Volumes *in*-4. avec 65 Planches, 20 l.

Davidis Gregori Aſtronomia Phyſica & Geometrica Elementa, Editio ultima auctior, en deux Volumes *in*-4. avec Figures. *Genevæ.*

Œuvres de Mathématique & de Phyſique de M. Mariotte, de l'Académie des Sciences, en 2 Volumes *in*-4. nouvelle Edit. *La Haye.* 1740.

Ouvrages de M. BOUGUER, de l'Académie Royale des Sciences, ancien Profeſſeur d'Hydrographie, &c.

Traité du Navire, de ſa conſtruction & de ſes mouvemens *in*-4. avec Figures. 1746. 15 l.

Eſſay d'Optique ſur la gradation de la lumiere, *in*-12. 2 l.

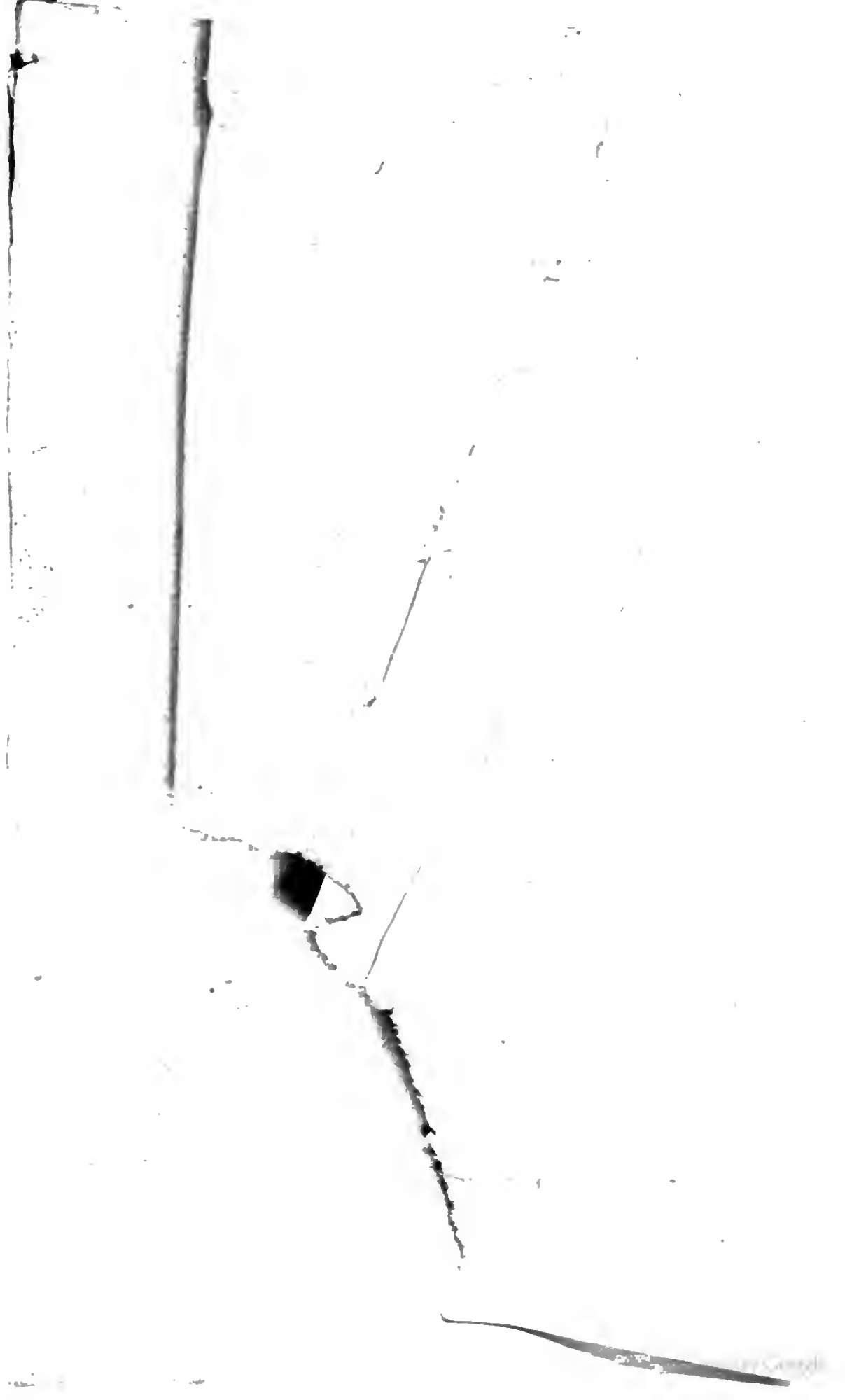
De la mâture des Vaiſſeaux ; Piece qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1727. avec deux autres Pieces ſur le même ſujet, *in*-4. avec Figures, 6 l.

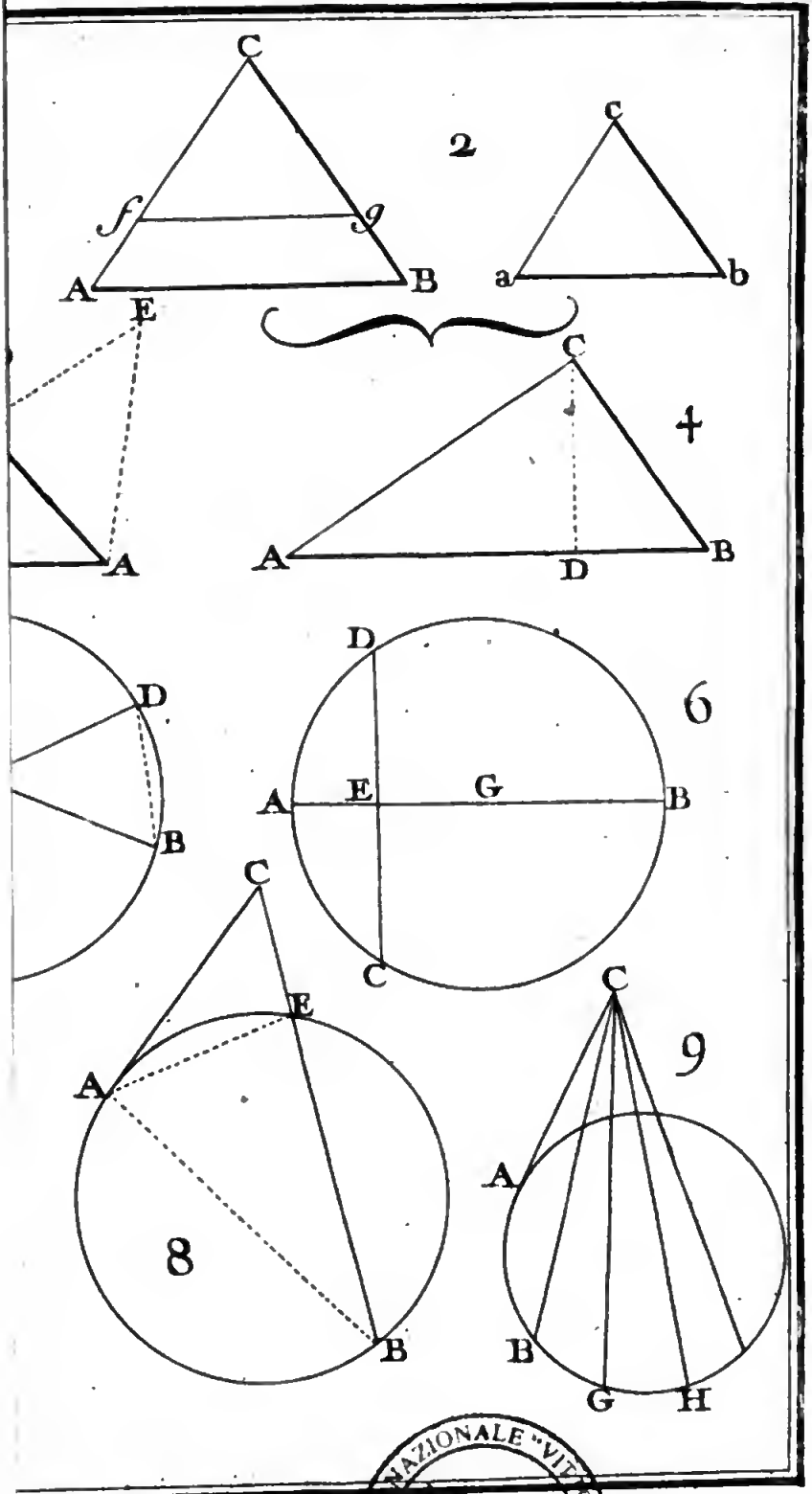
Mérhode d'obſerver exactement ſur mer la hauteur des Aſtres, Piece qui a remporté le prix de l'Académie en 1729. Brochure *in*-4. 1 l. 10 ſ.

De la maniere d'obſerver en mer la déclinaiſon de l'Aiguille aimantée ; Piece qui a remporté le prix de l'Académie en 1731. Brochure *in*-4. 1 l. 10 ſ.

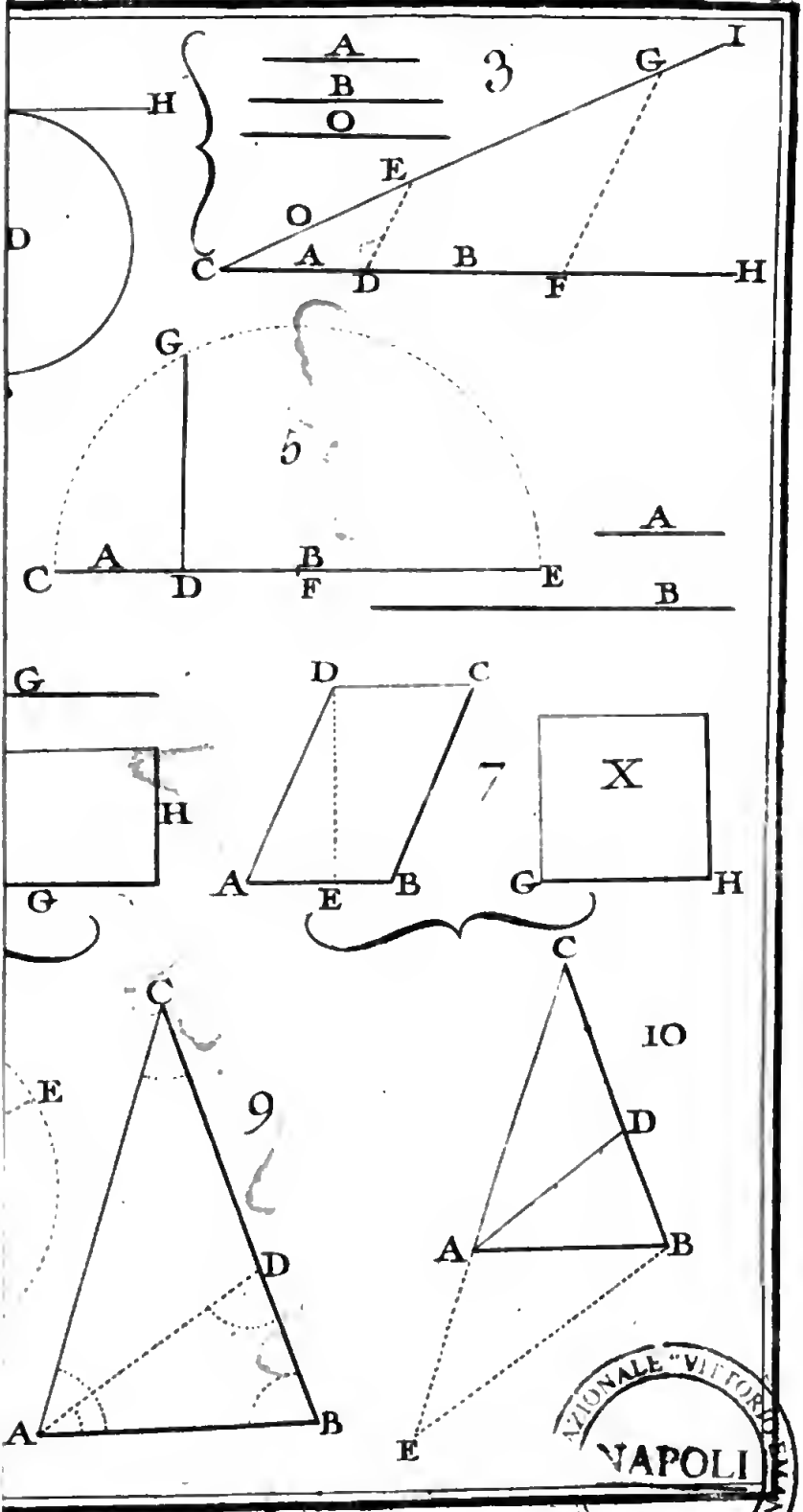
Entretiens ſur la cauſe de l'inclinaiſon des orbites des Planétes ; Piece compoſée à l'occaſion du prix propoſé par l'Académie en 1732. Nouvelle édition augmentée. Brochure *in*-4. 1748. 3 l.

Traité complet de la Navigation, compoſé pour l'inſtruction des Officiers de Marine, & dicté dans les Ecoles Royales de Marine, par M. Bouguer pere, Hydrographe du Roi, *in*-4.

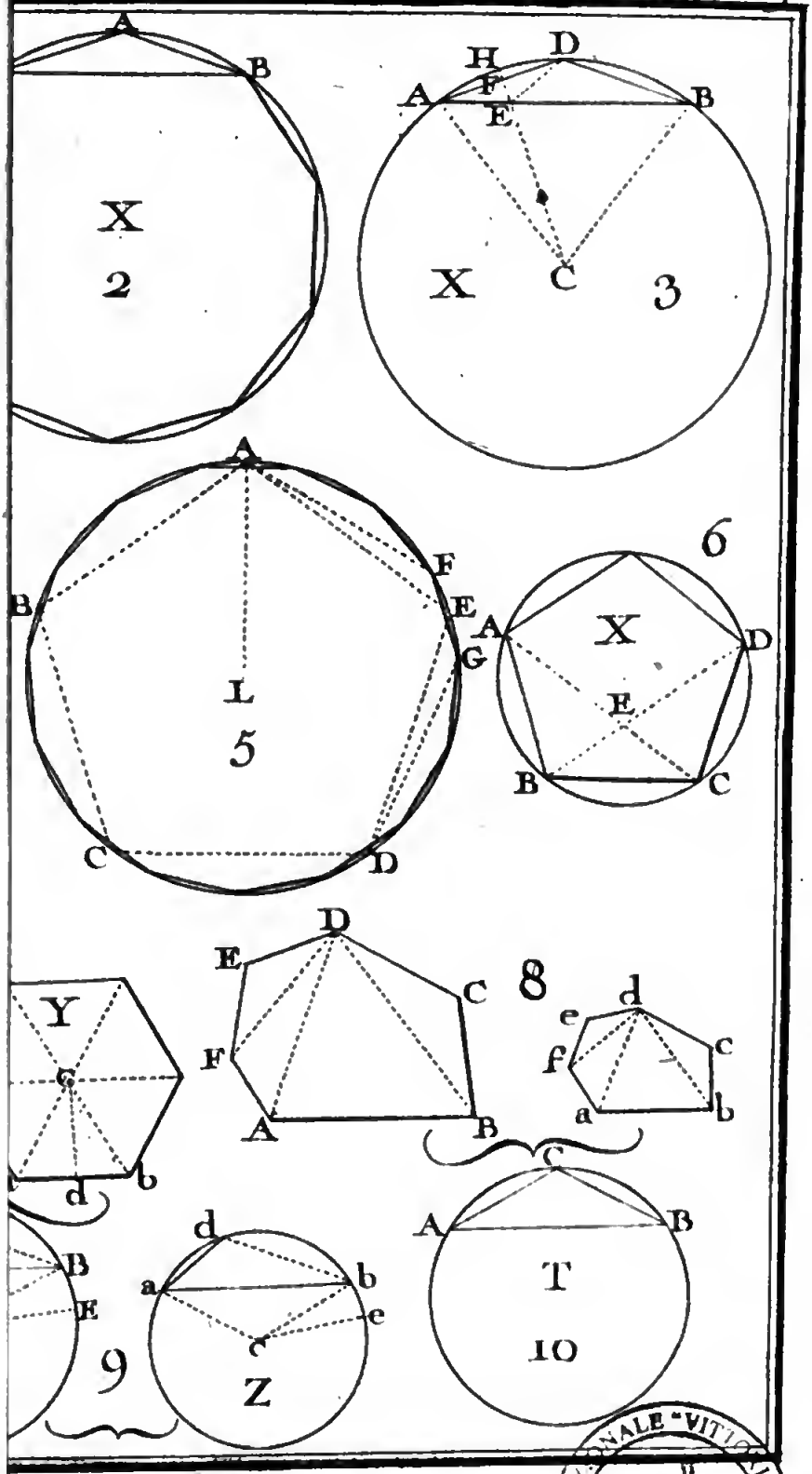




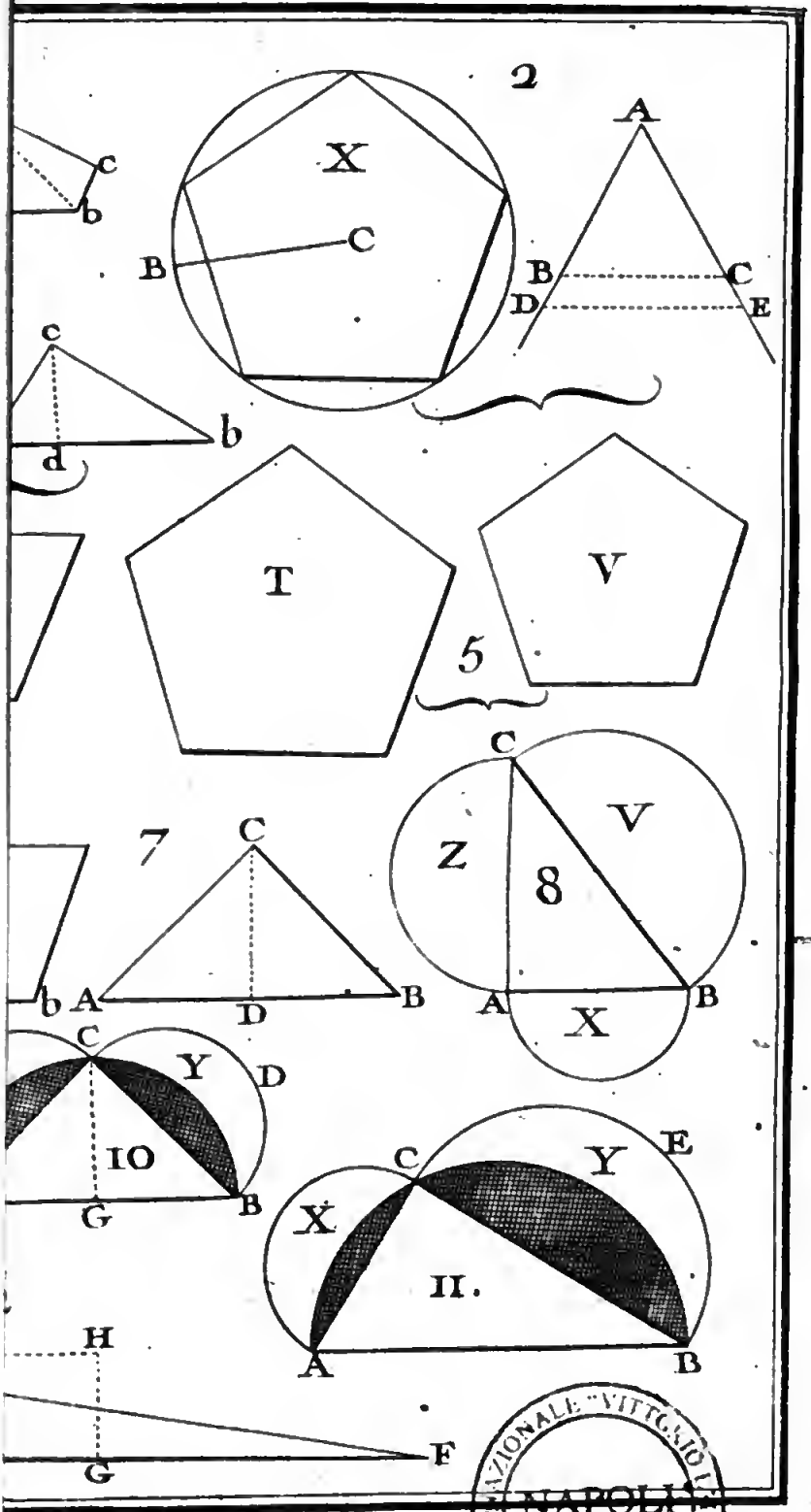
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI


A
B
O
3
H
I
G
E
O
D
C
A
D
B
F
H
G
5
C
A
D
B
F
E
A
B
G
H
G
D
C
7
X
A
E
B
G
H
C
10
D
A
B
E
C
E
9
D
A
B

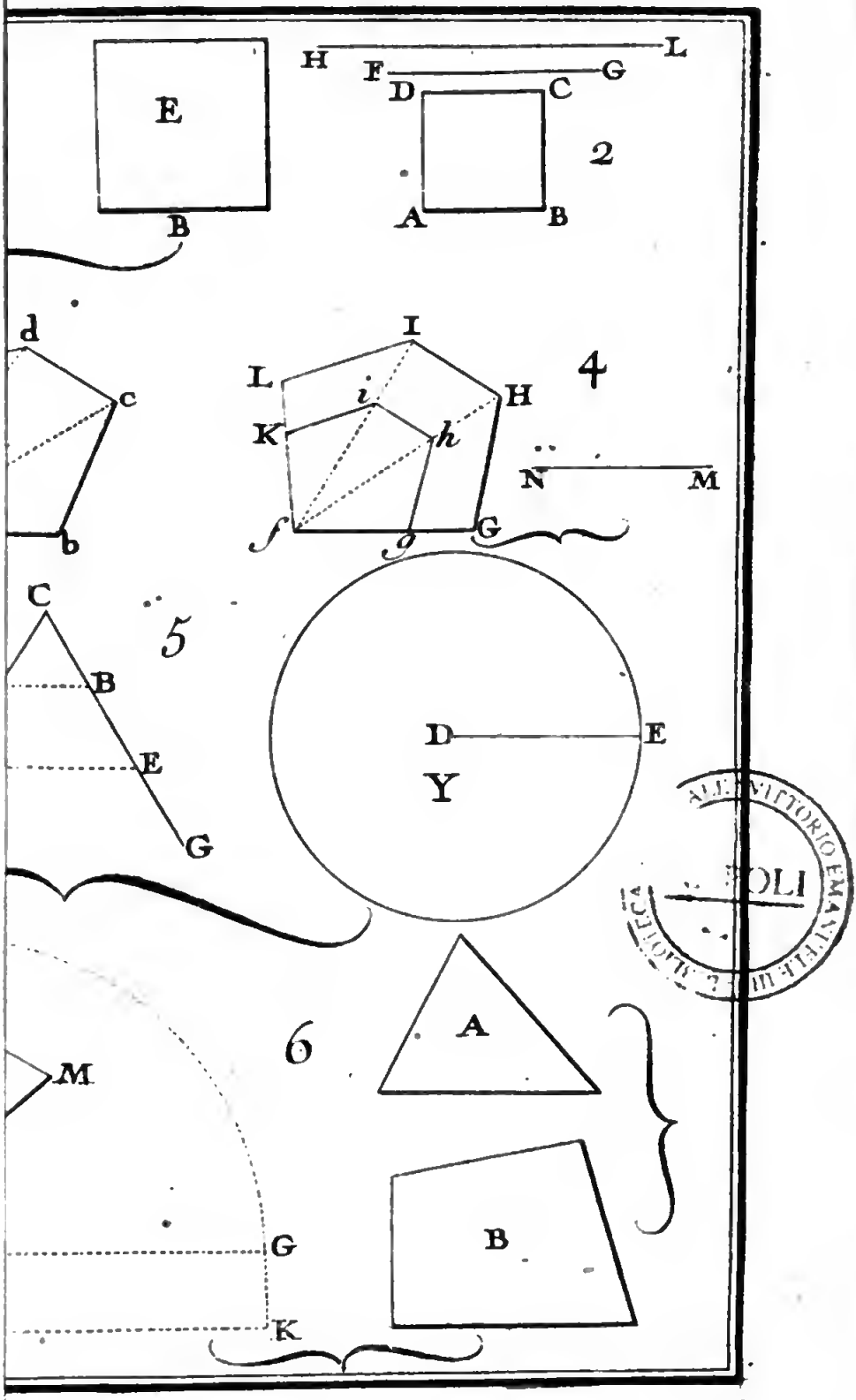
NAPOLI


A
B
X
2
H
D
A
F
B
E
X
C
3
A
F
B
E
G
L
5
C
D
6
X
A
D
E
B
C
Y
C
d
b
D
E
C
F
A
B
8
d
e
c
f
a
b
B
E
9
d
a
b
e
c
Z
C
A
B
T
10

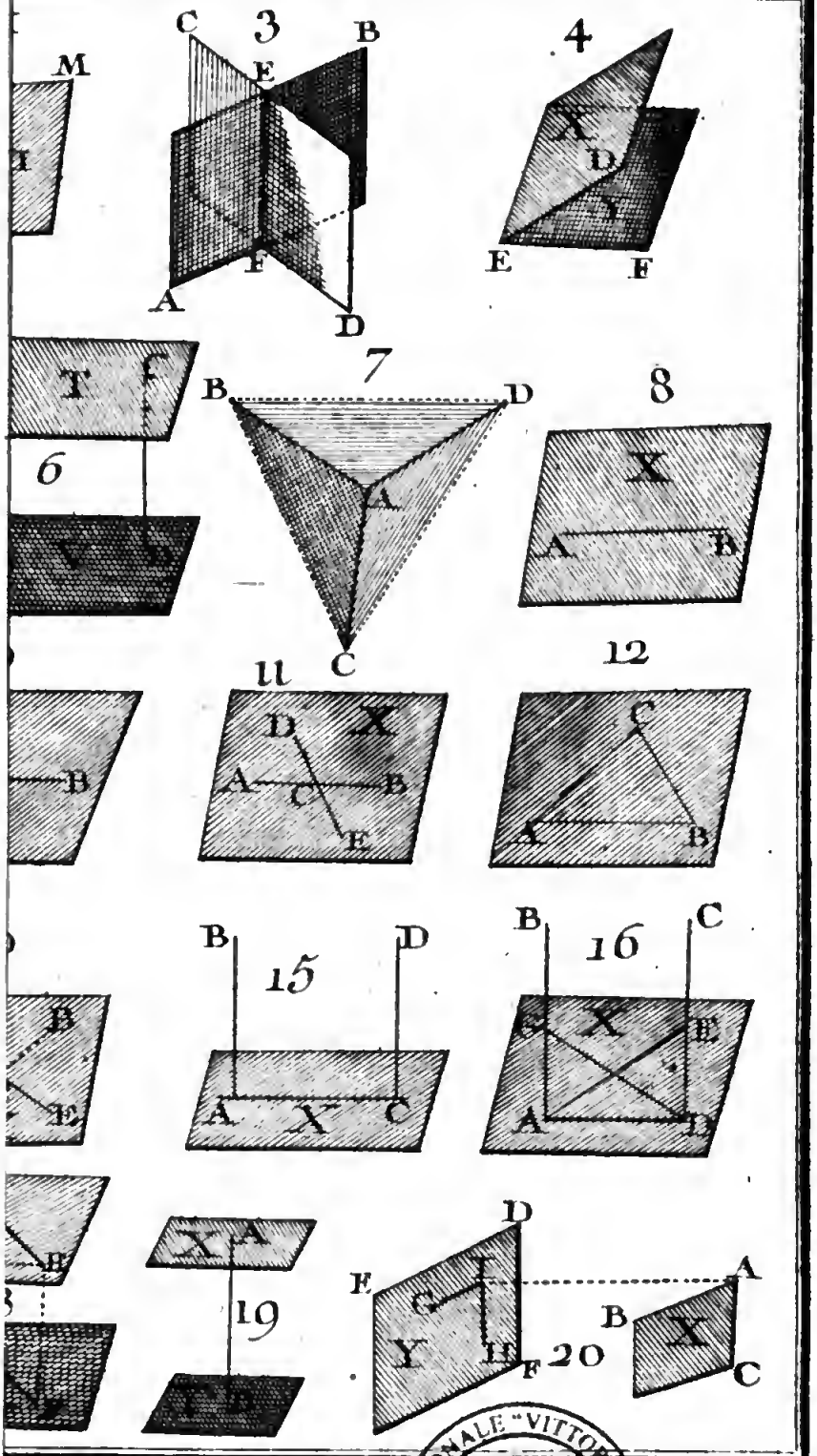
NAPOLI



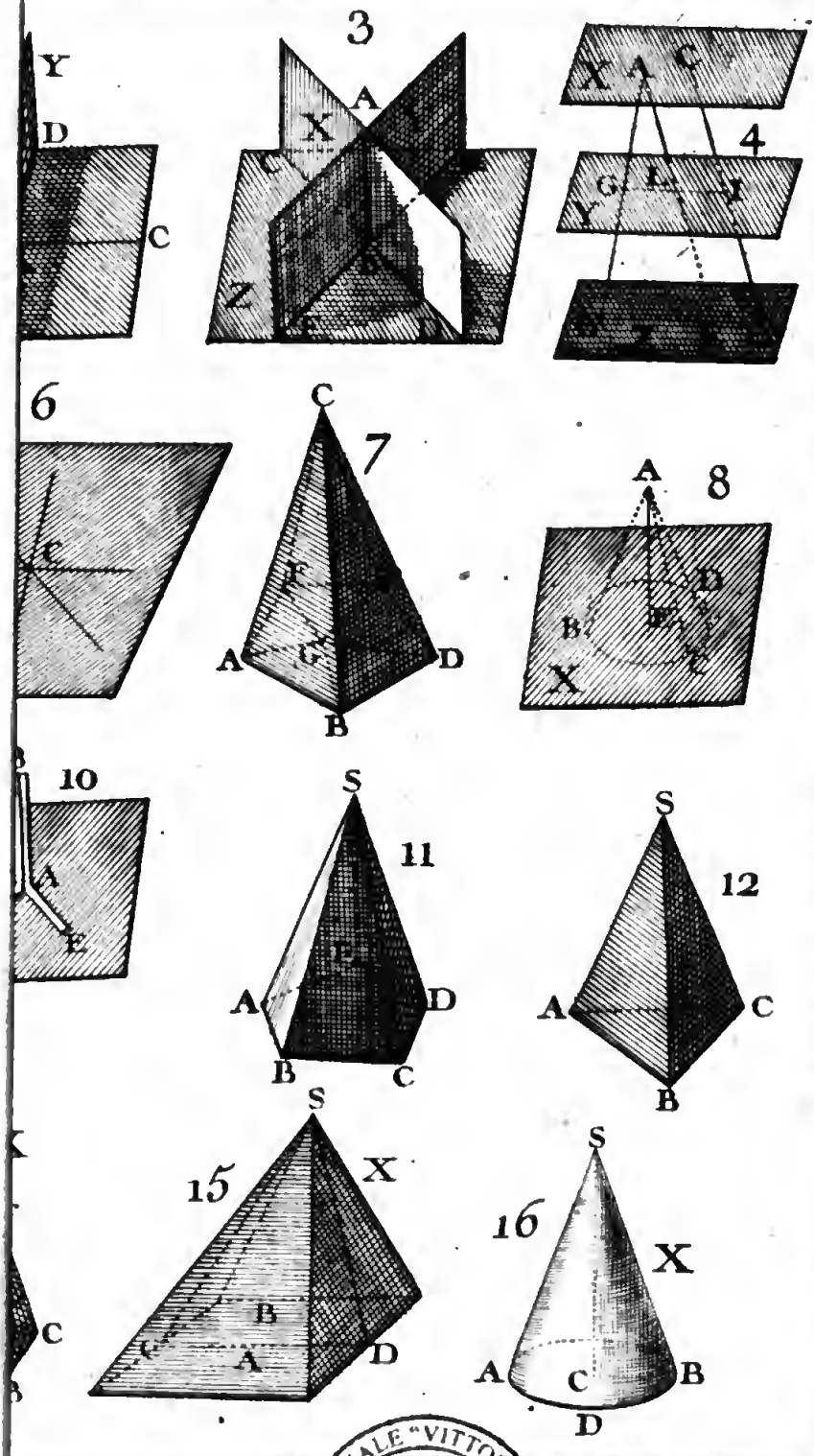
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



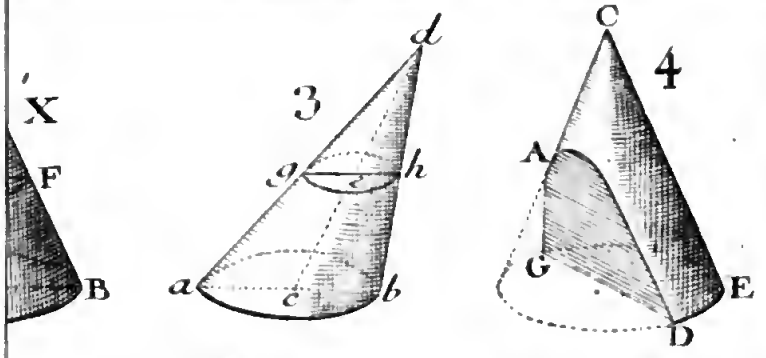
ALLA BIBLIOTECA DEL MUSEO

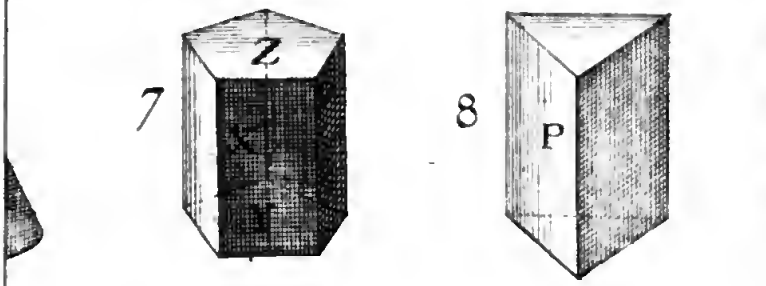


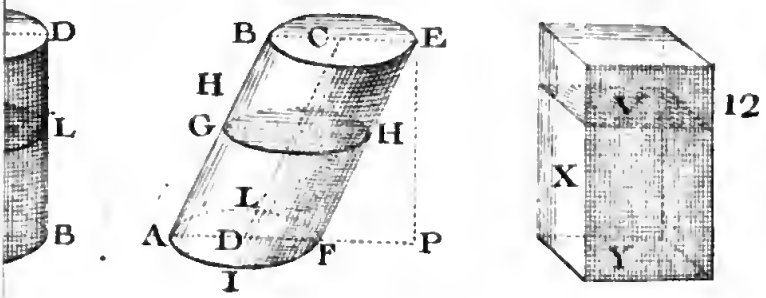
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

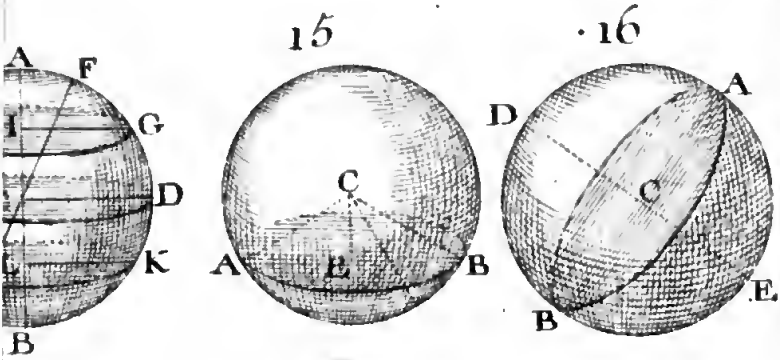


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

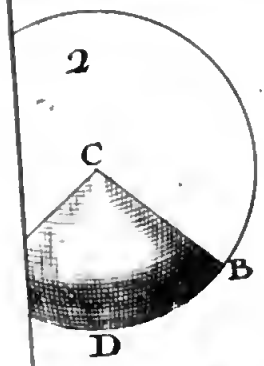


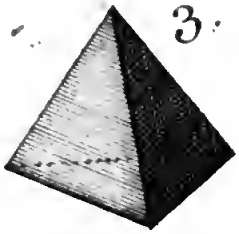


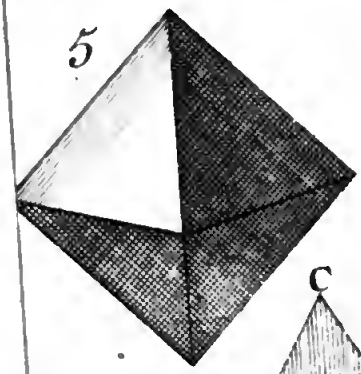


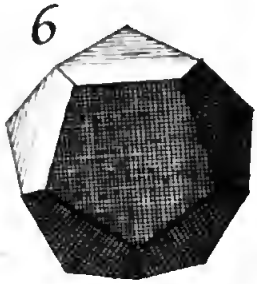


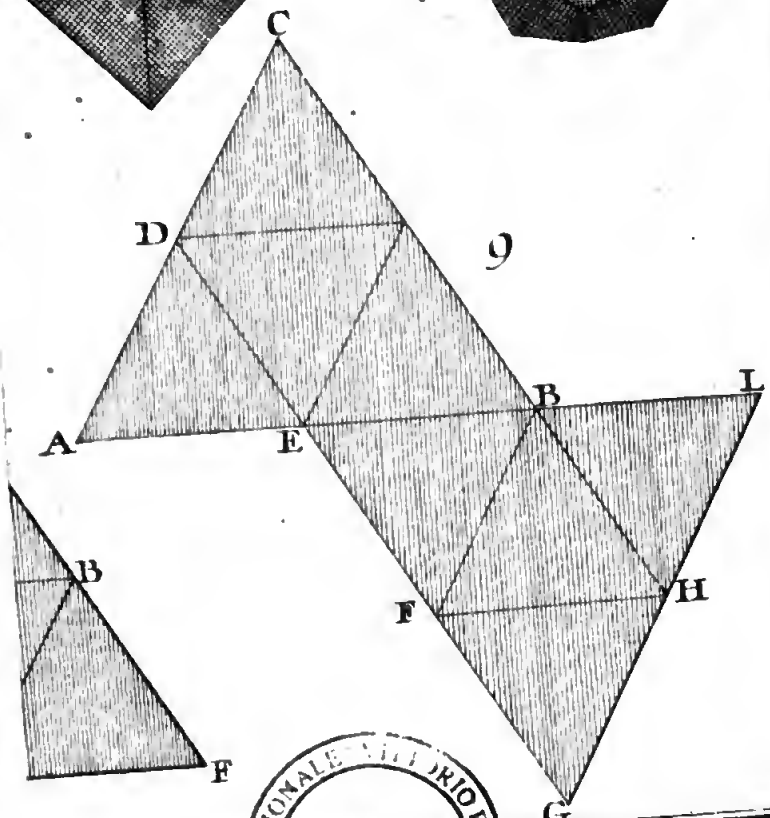
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



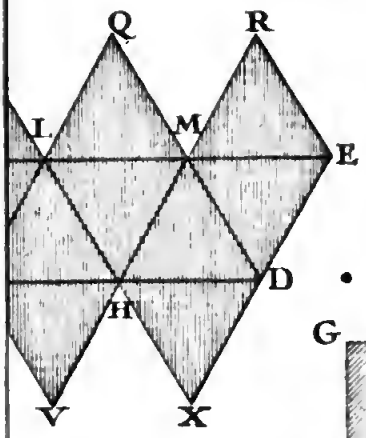


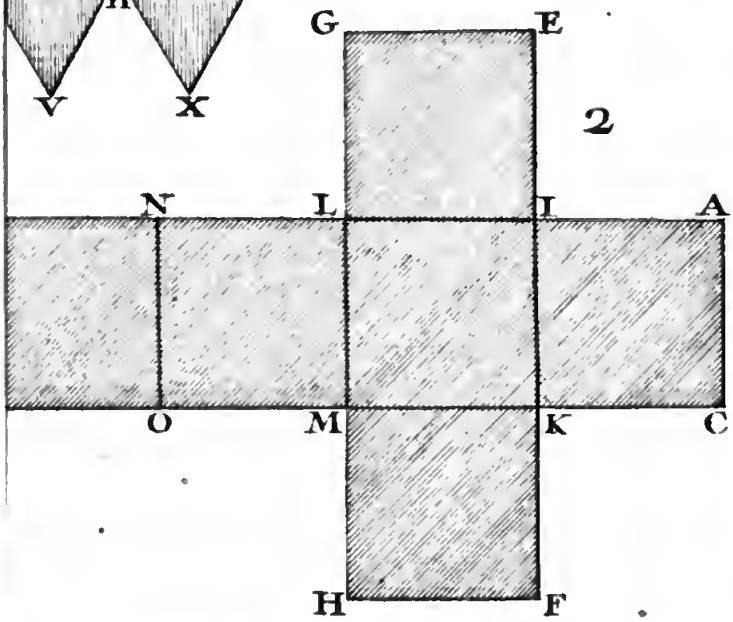


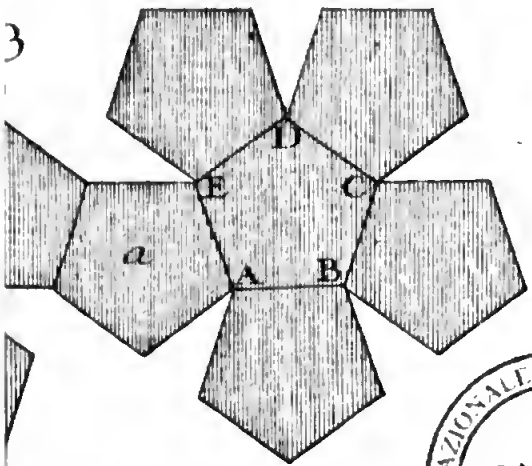




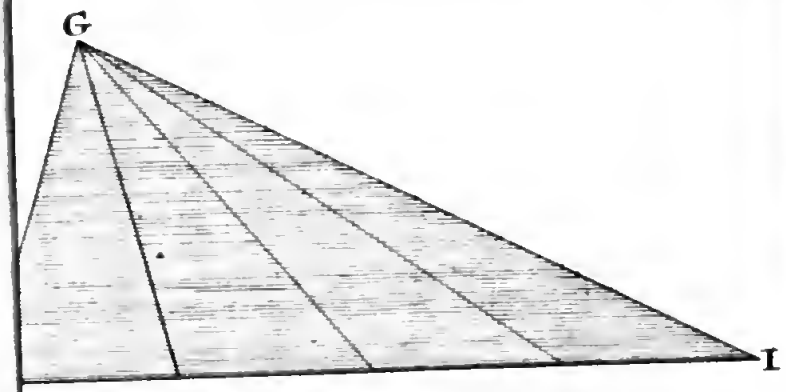
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

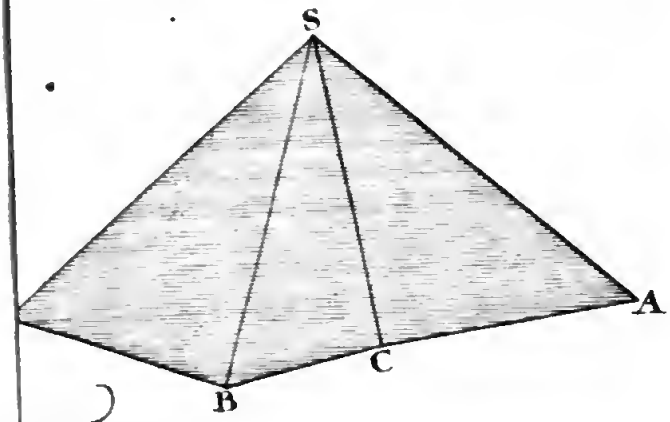


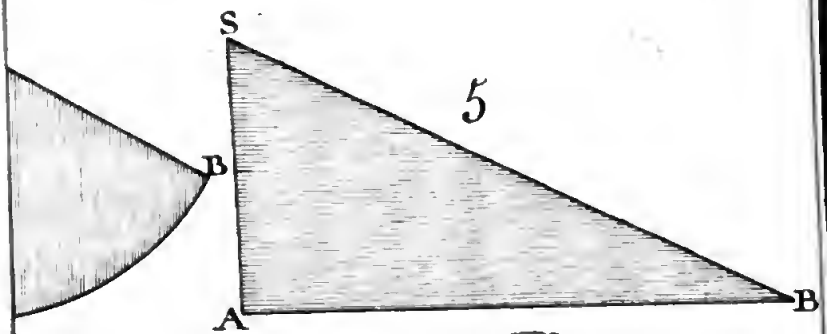




BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EM... DELLE BELLE ARTI
NAPOLI

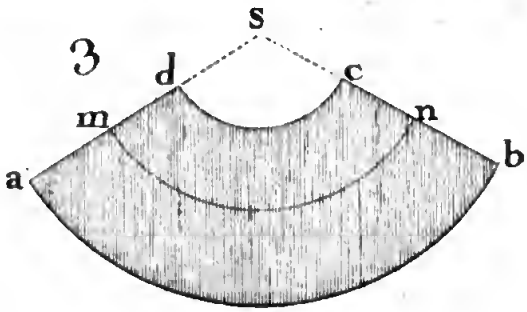


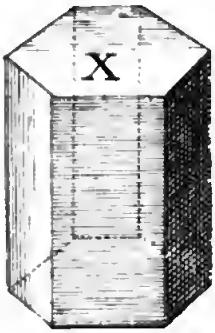




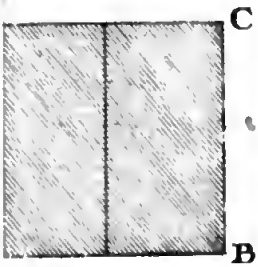
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

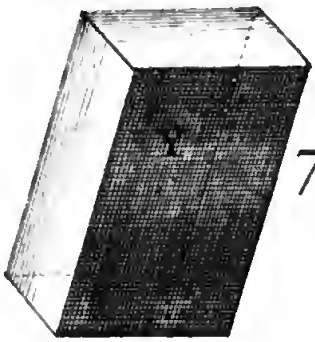
3



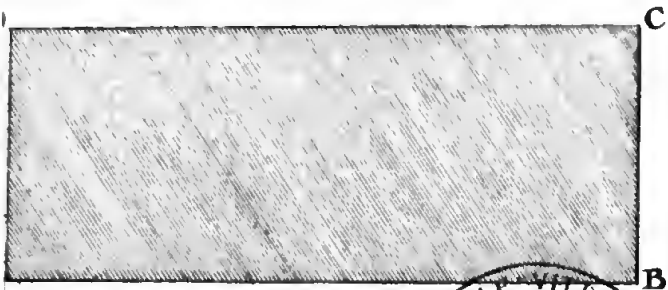


5

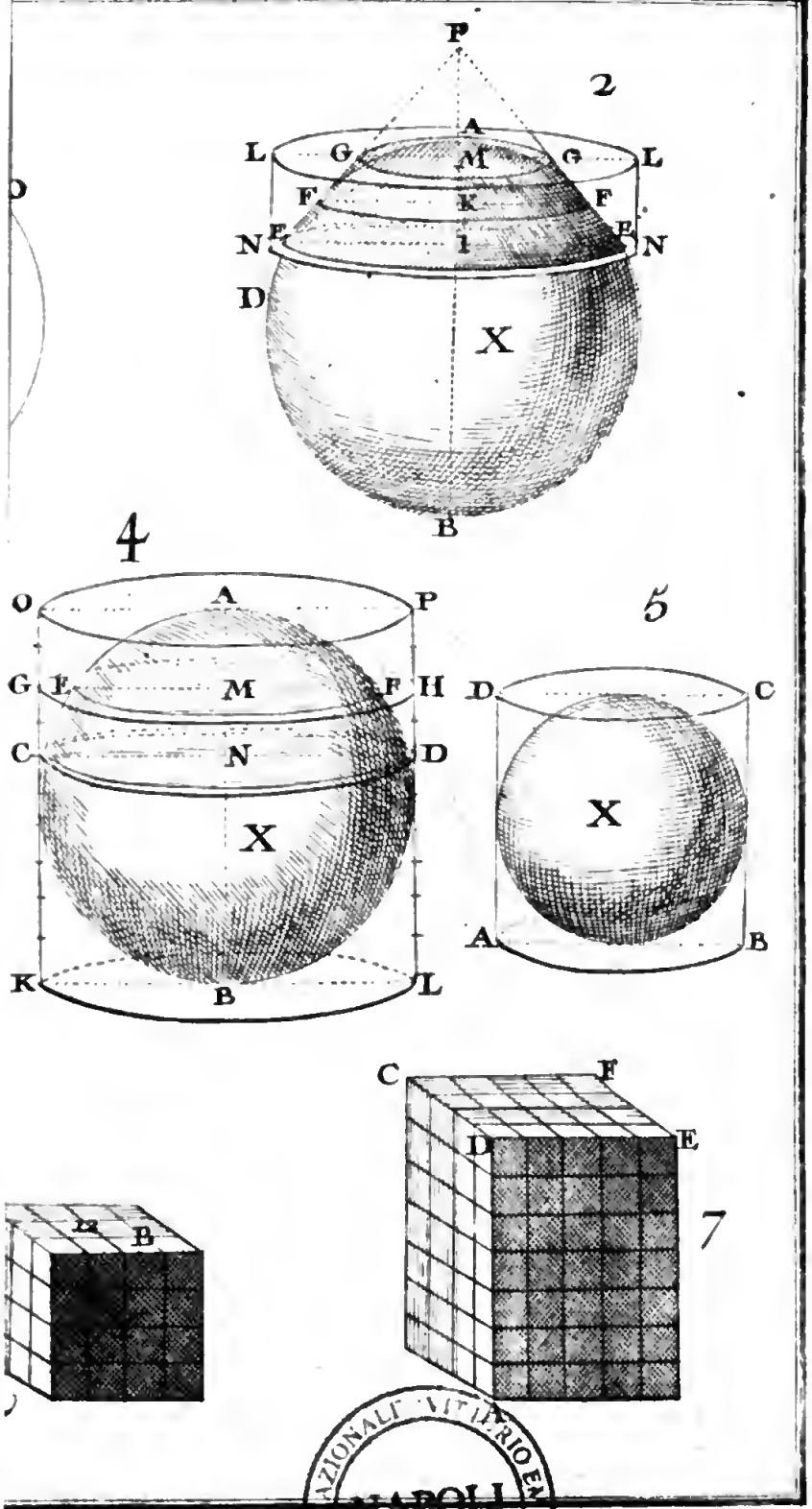




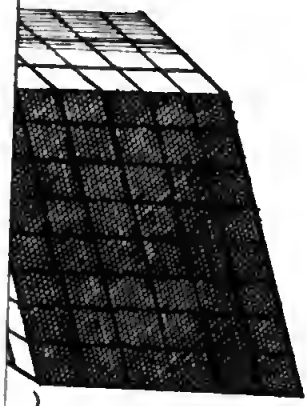
7

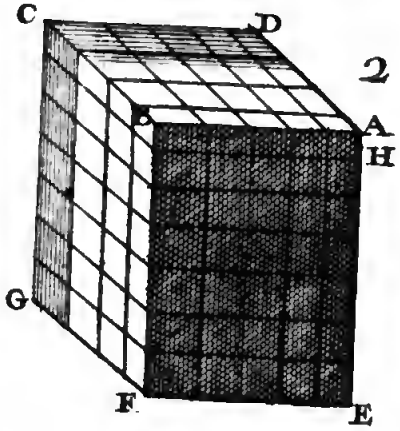


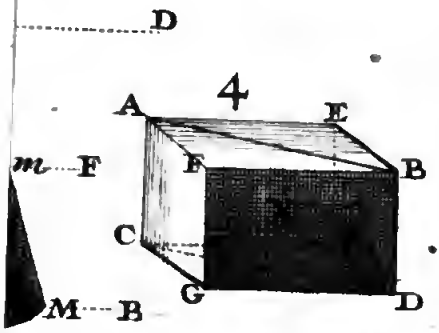
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

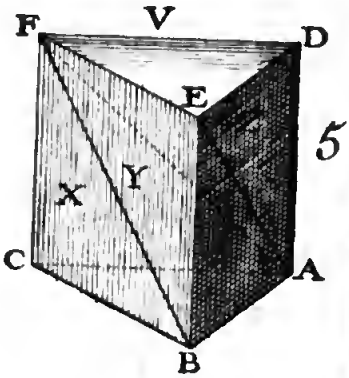


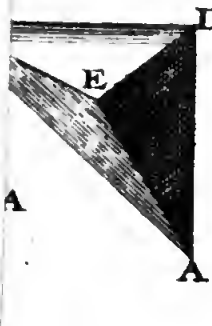
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

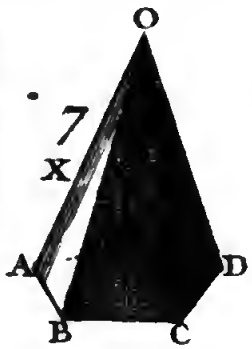


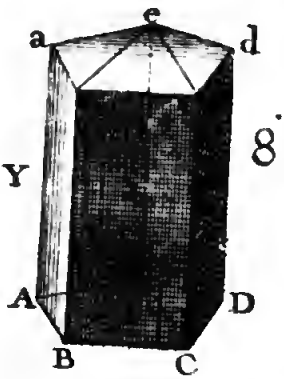




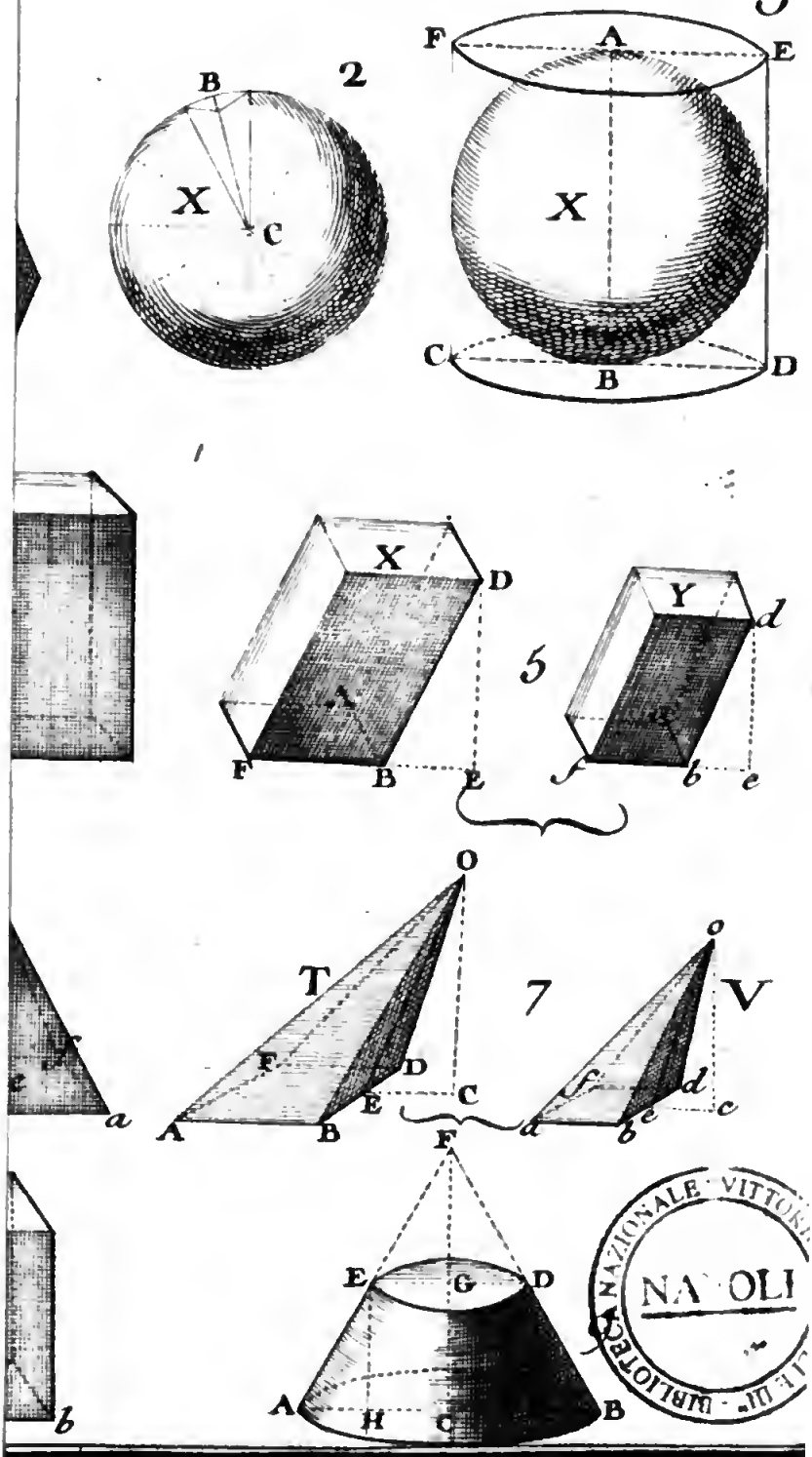




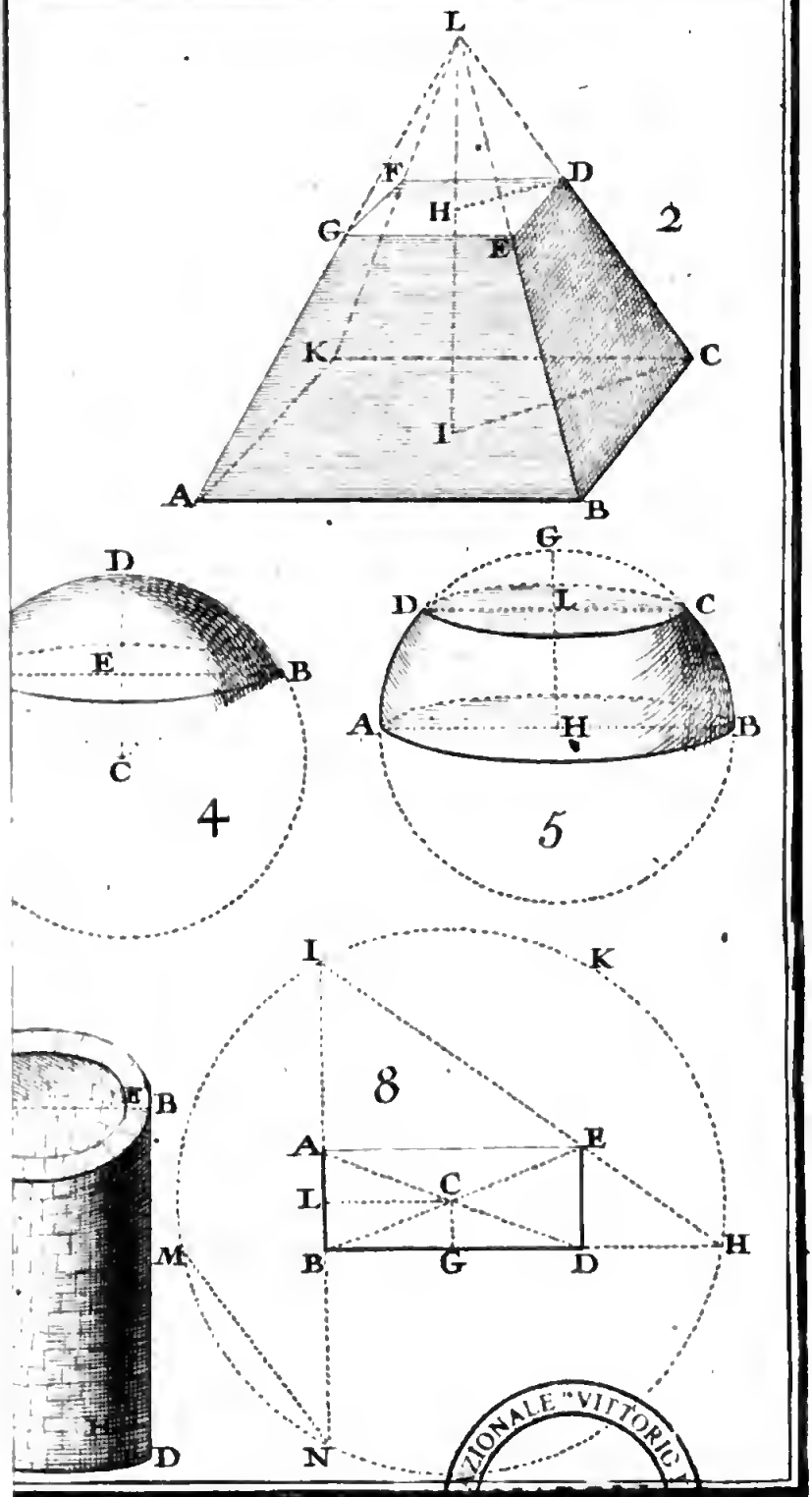




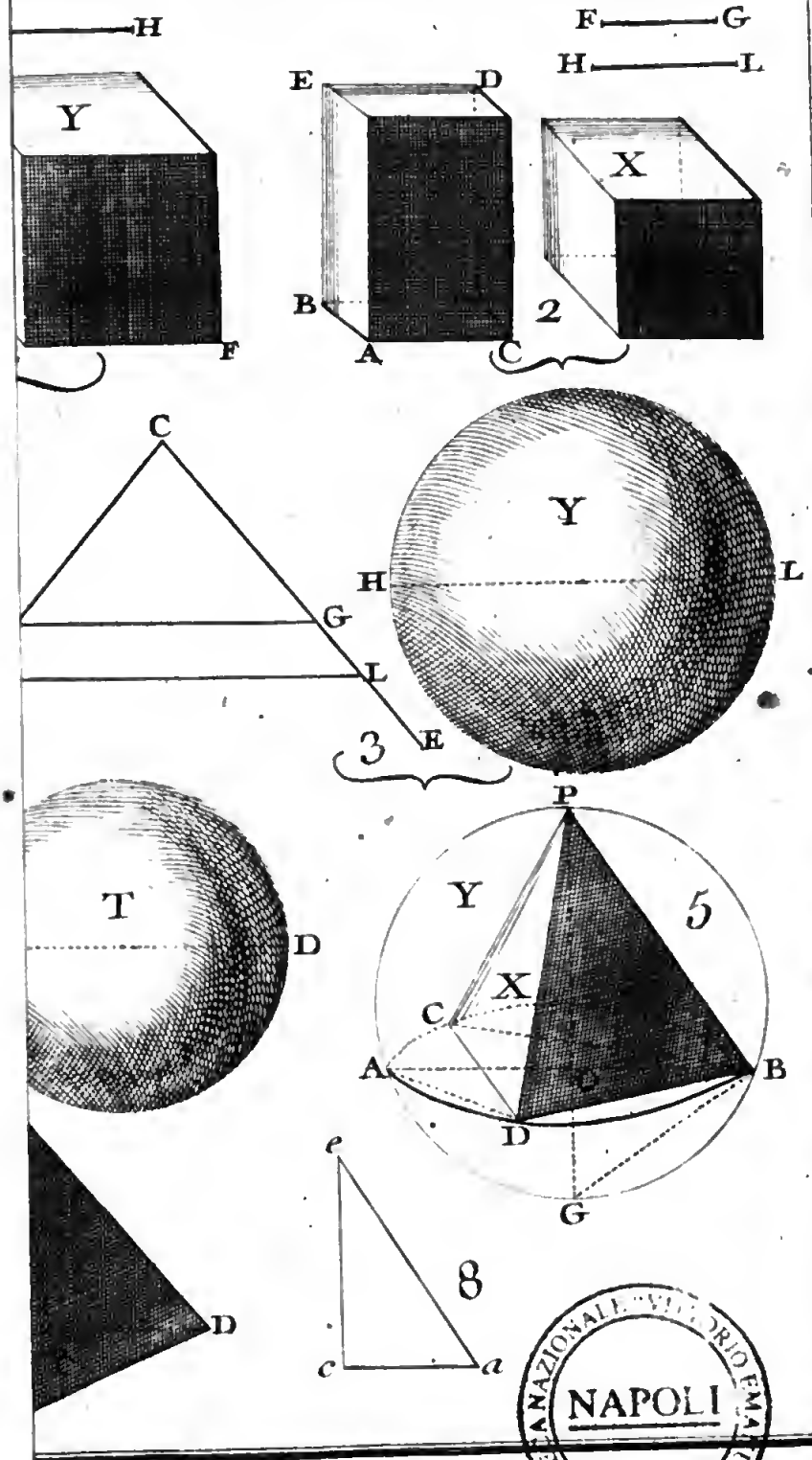
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



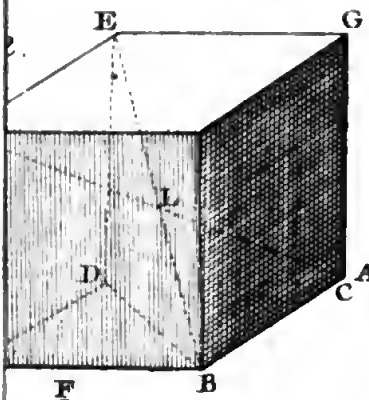
NAZIONALE VITTORIO
NAPOLI
BIBLIOTECA



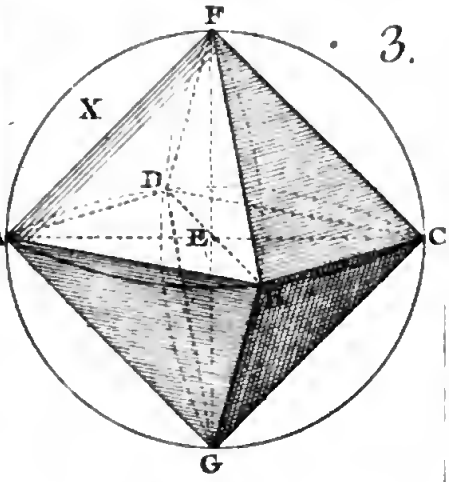
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

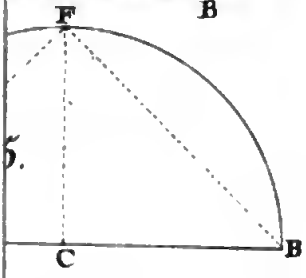


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

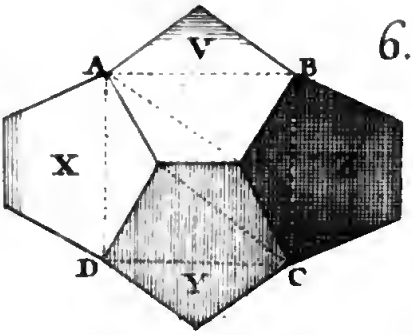


3.



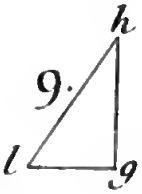


6.

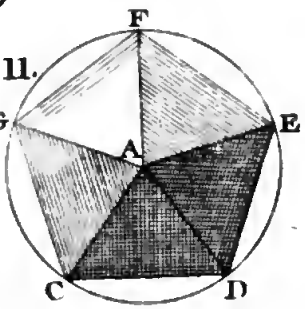


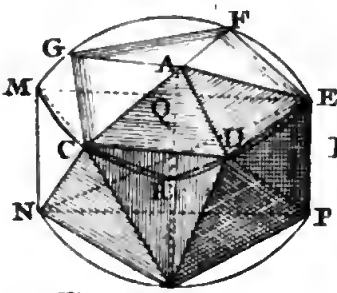
8.

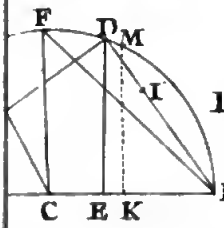
9.



11.

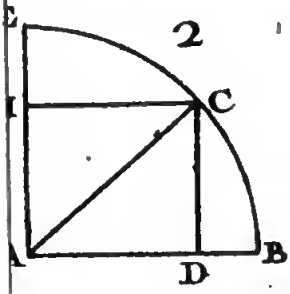


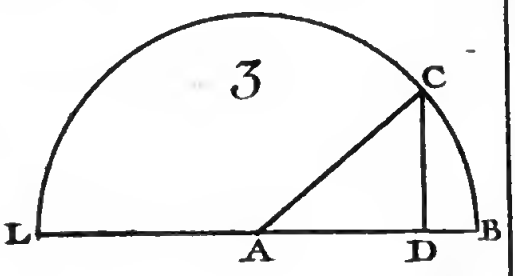


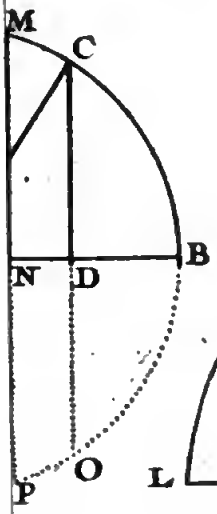


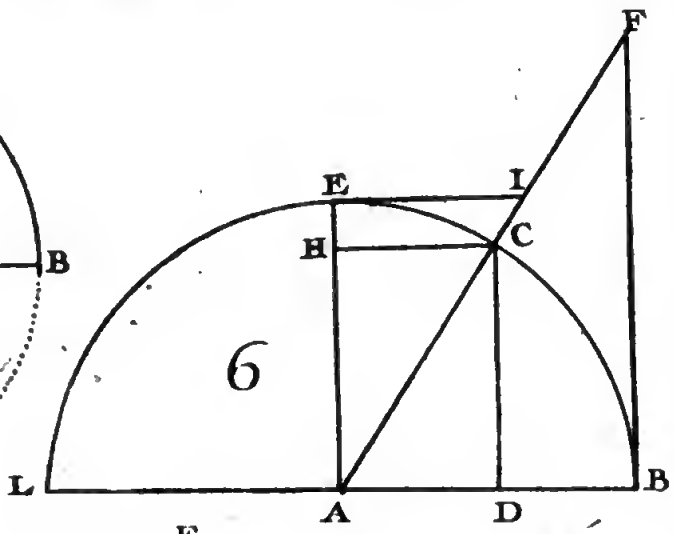
BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III -
NAPOLI

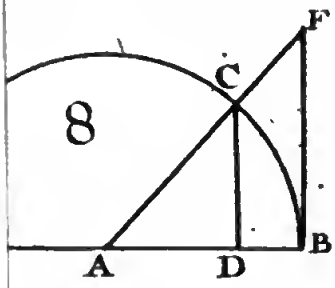
Le Parmentier Sculp.

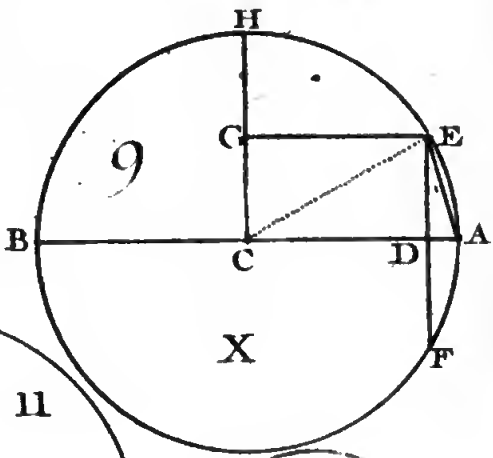


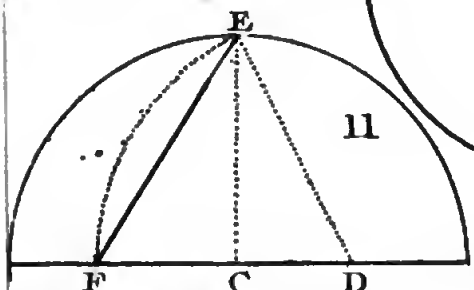




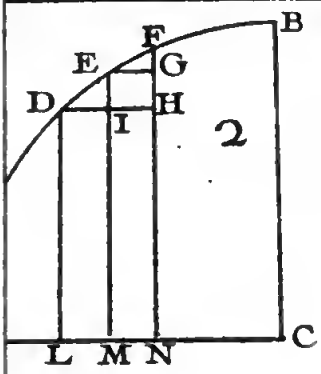


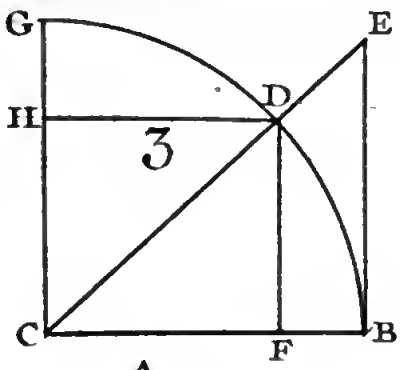


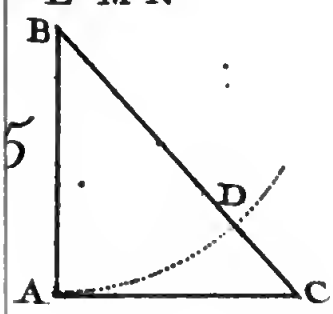


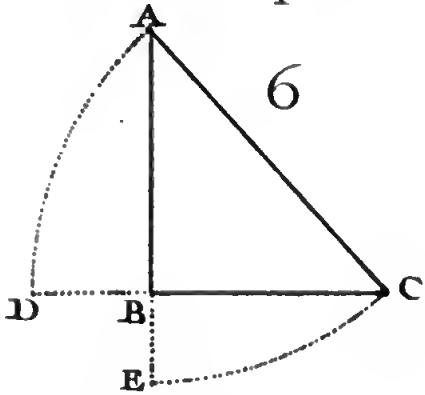


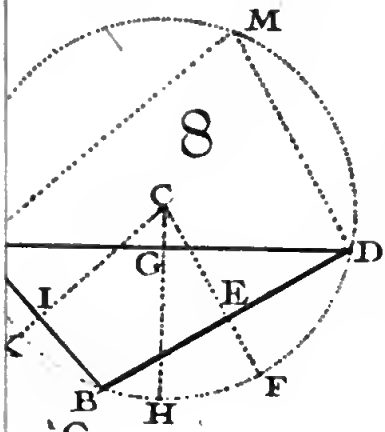
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

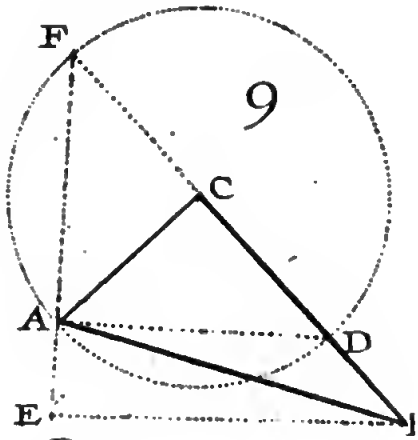


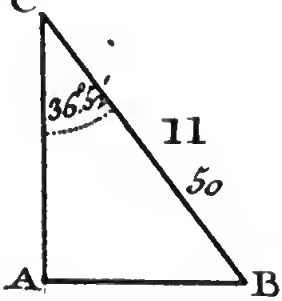


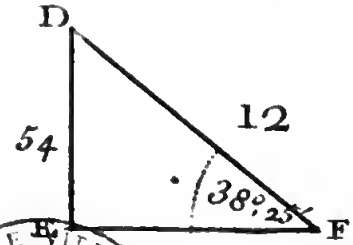




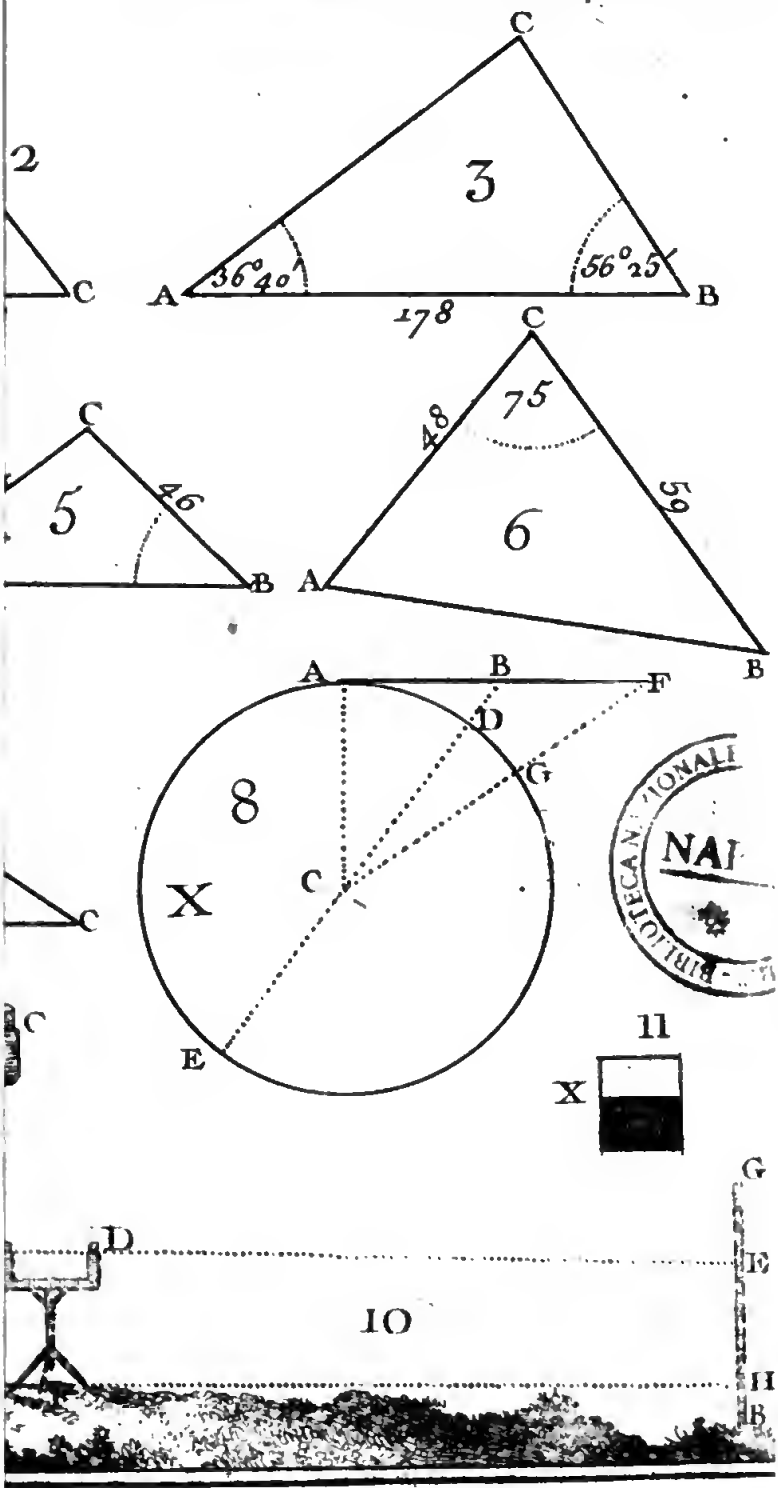








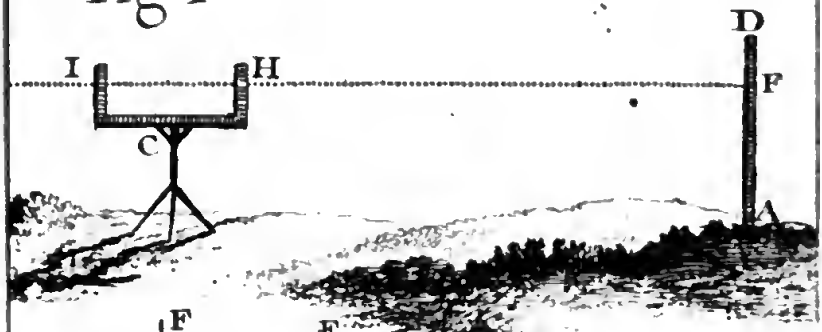
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

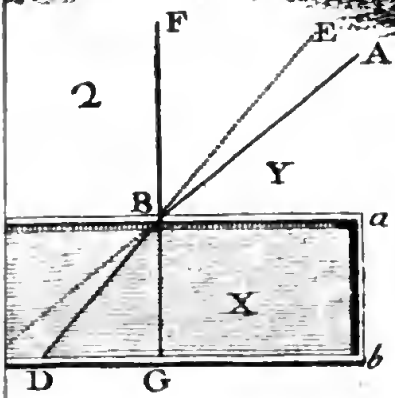


BIBLIOTECA NAZIONALE
NAP

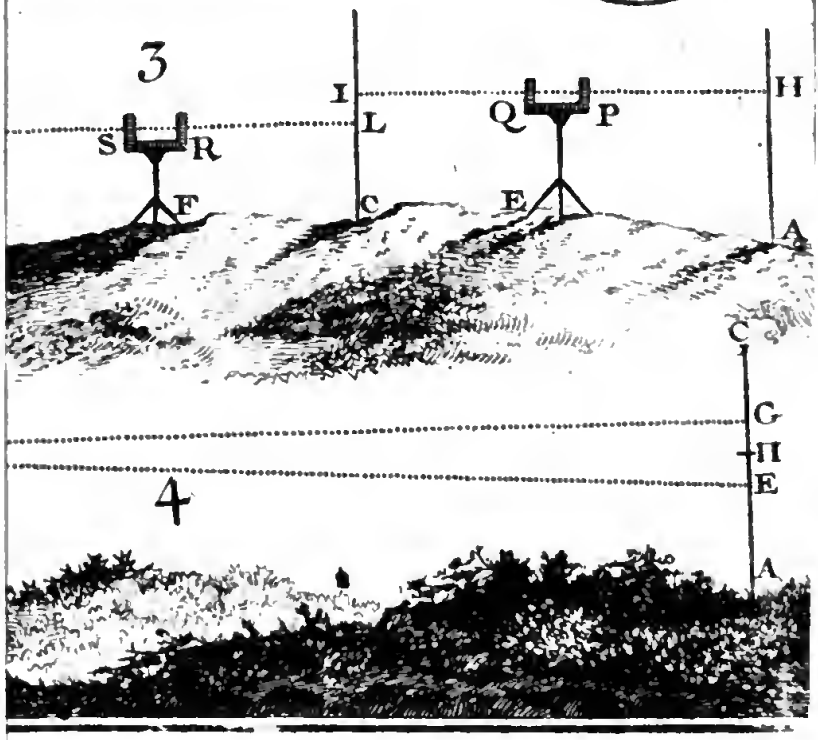
4

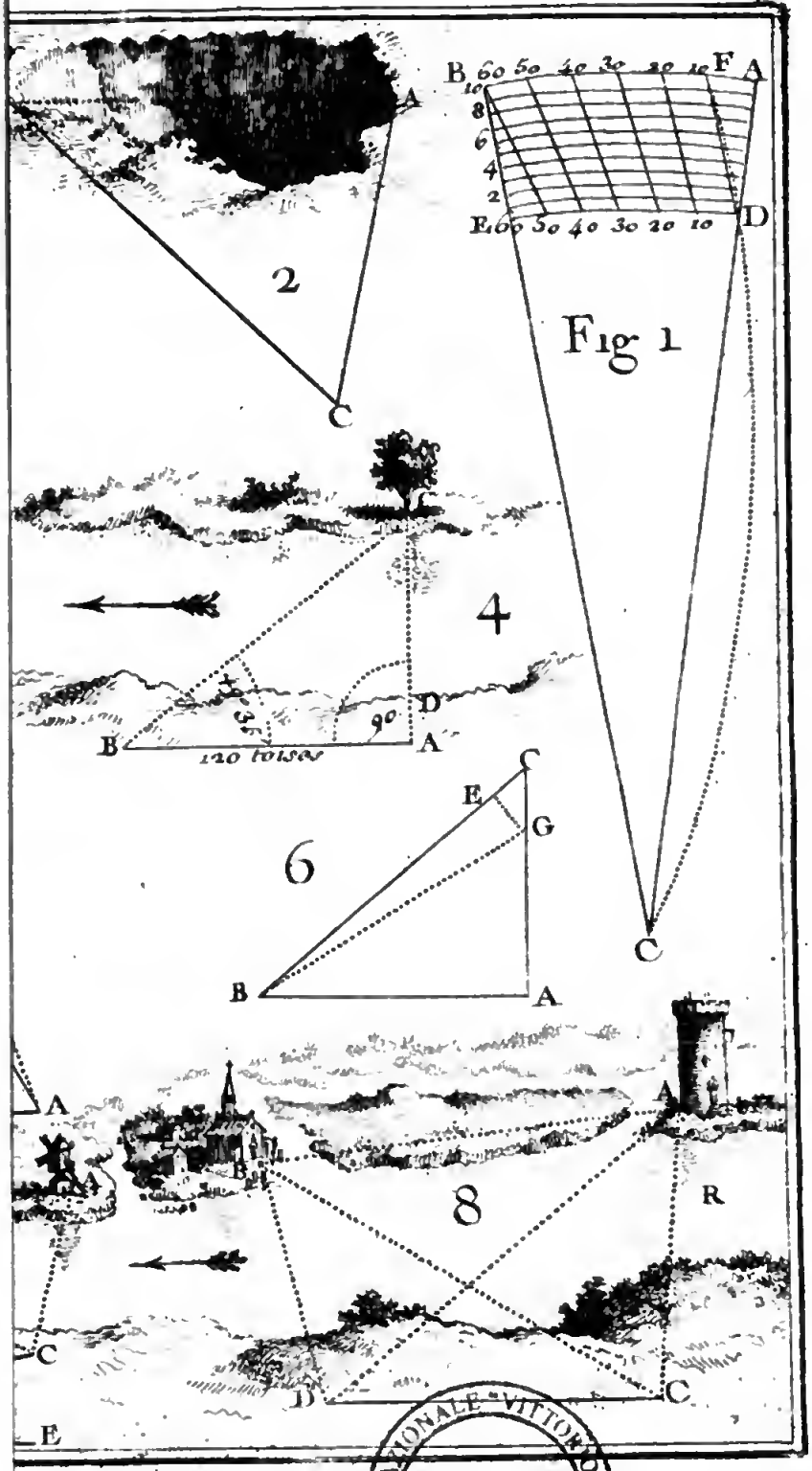
Fig 1



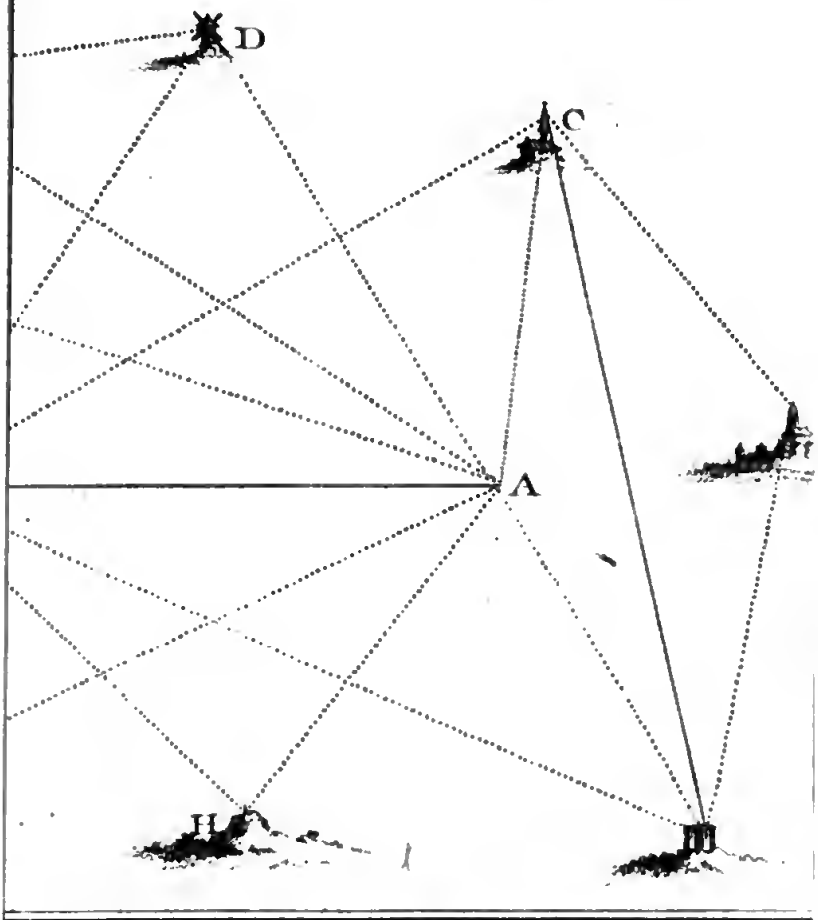


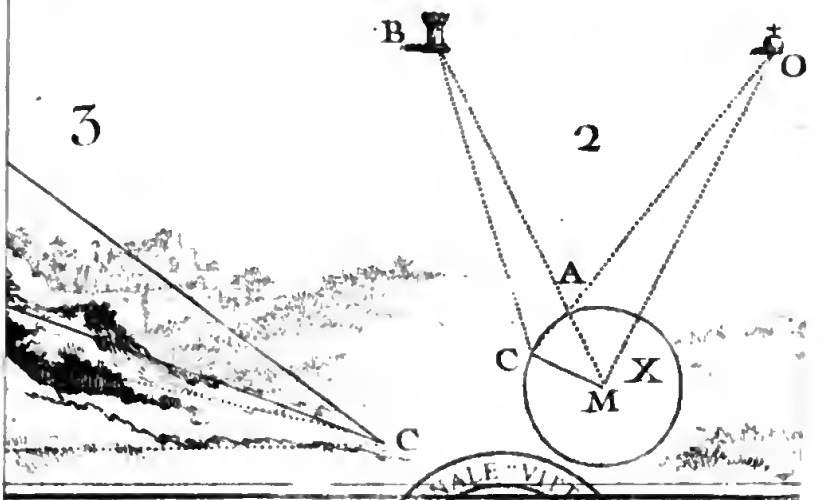
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI



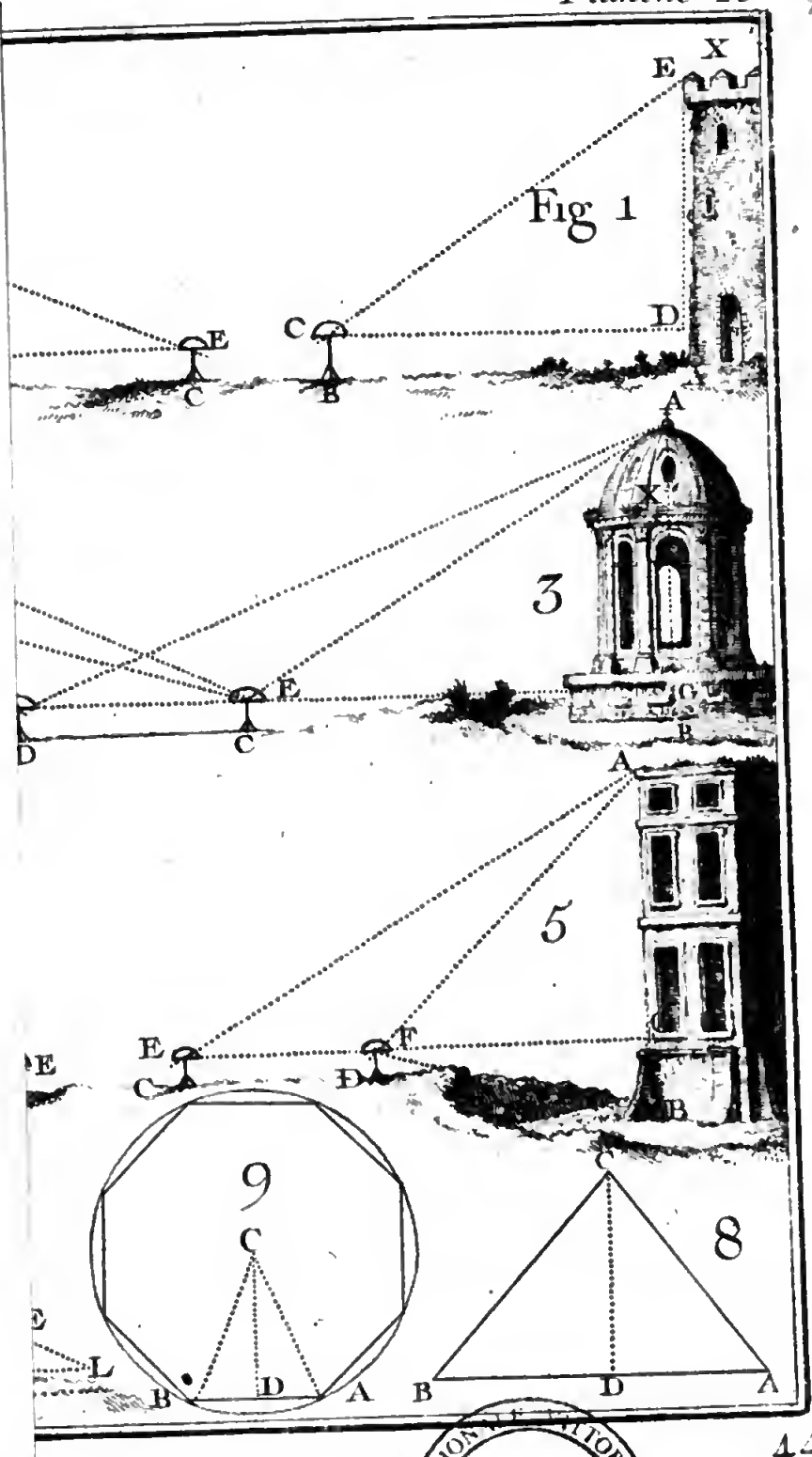


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

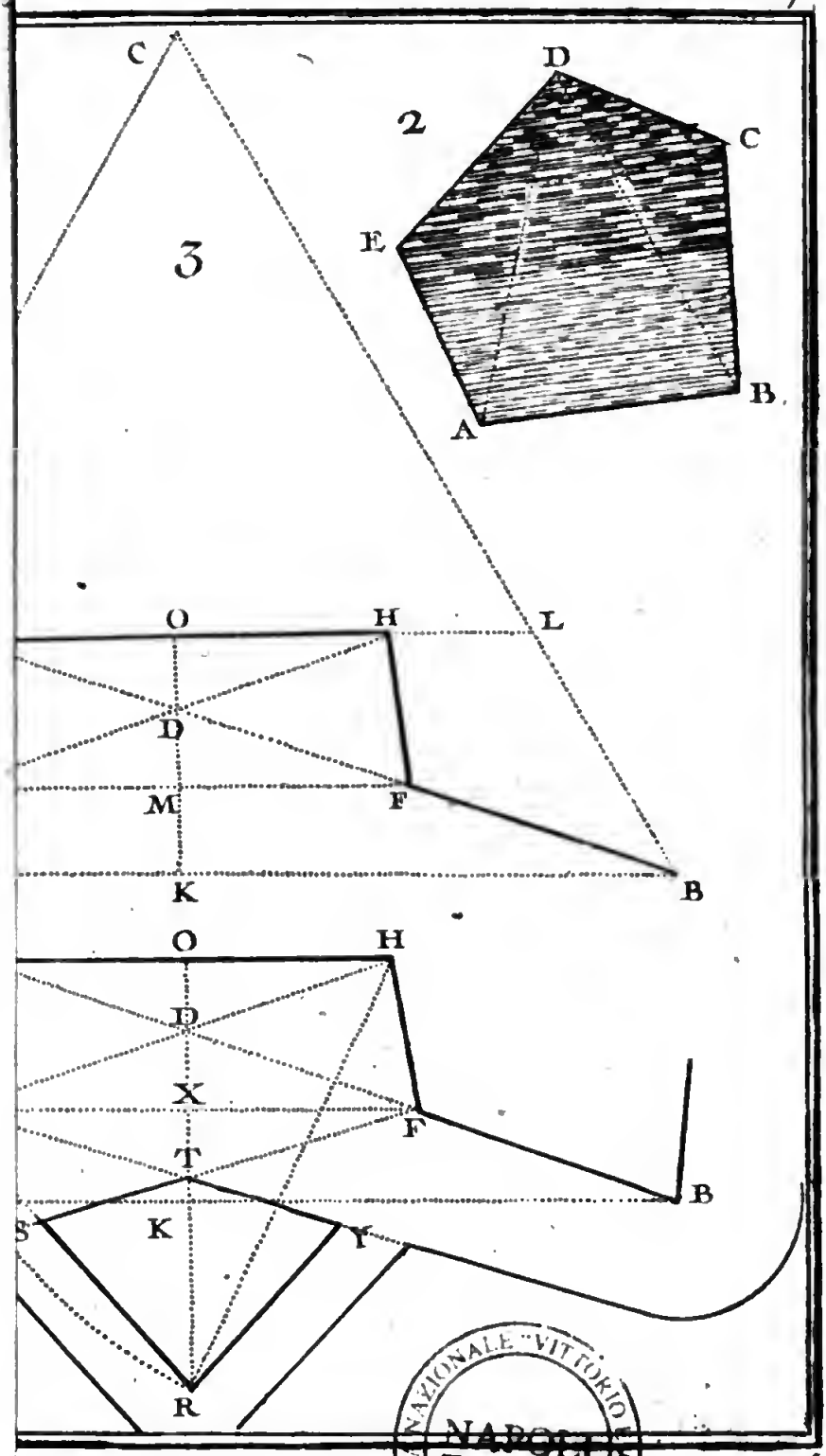
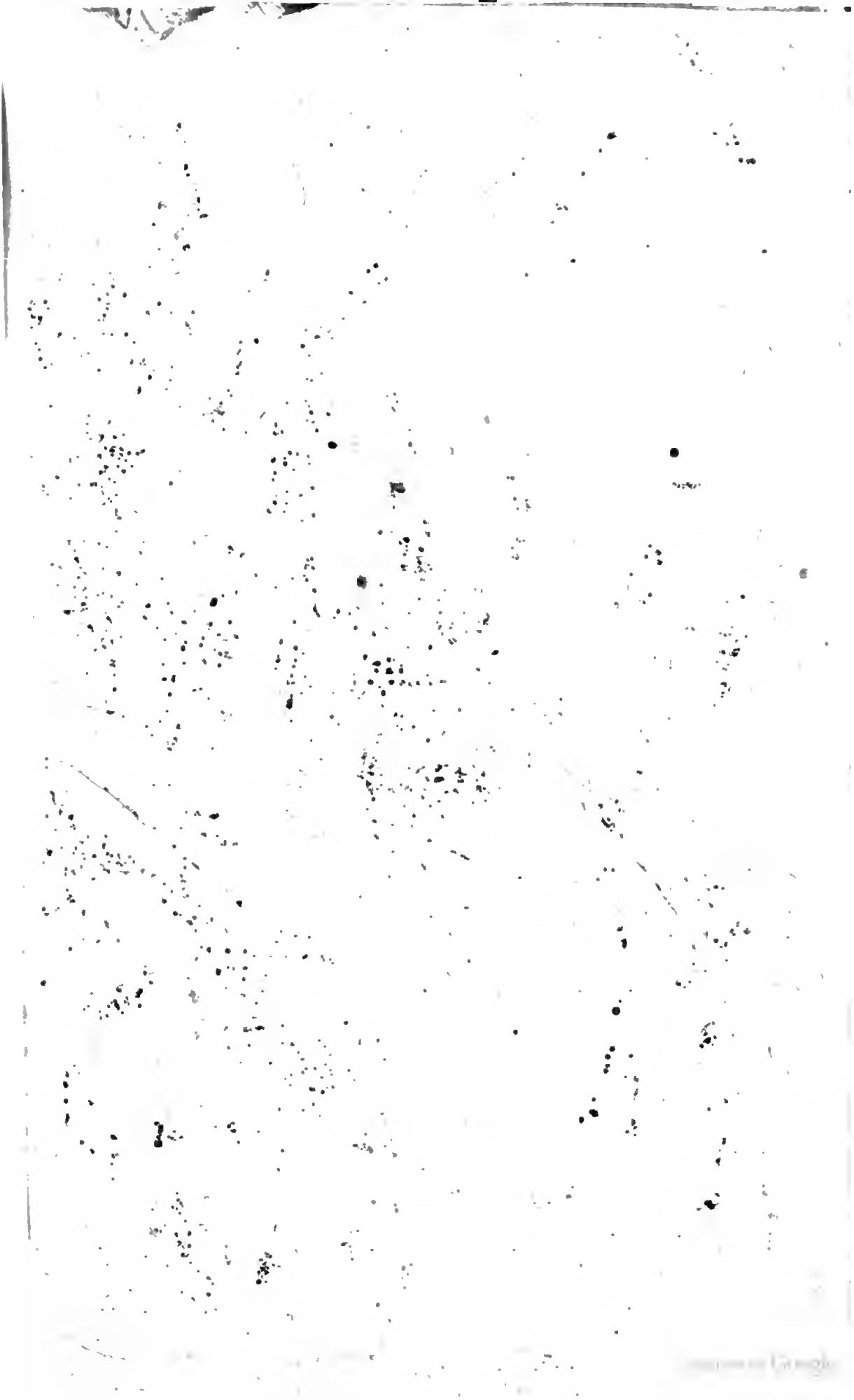




BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI